

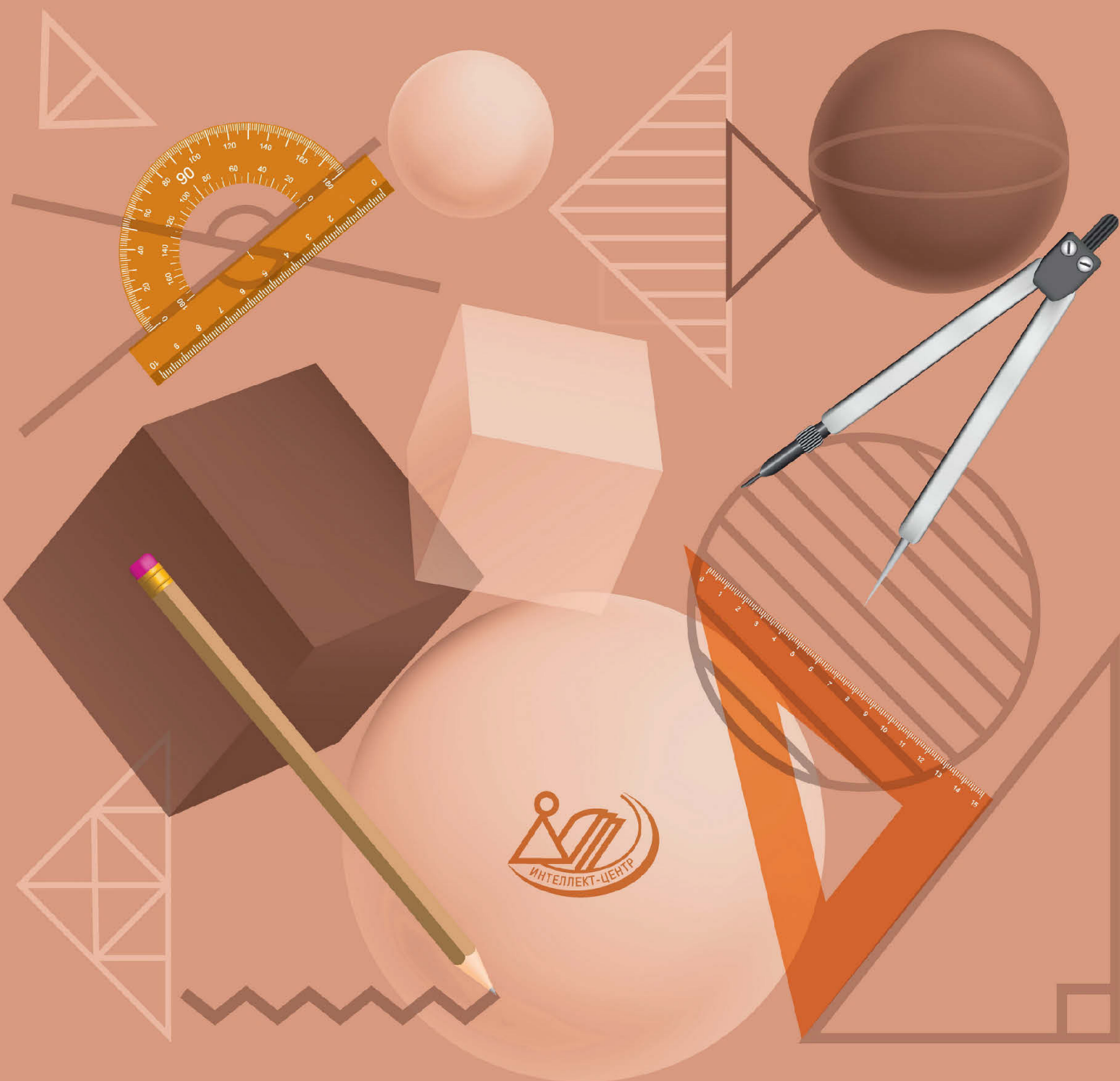
ГЕОМЕТРИЯ

9

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

КЛАСС

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ



Т.Л. Ниренбург

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Электронное издание



Москва
Издательство «Интеллект-Центр»
2025

УДК 514(075.3)

ББК 22.1я721

Н68

Рецензенты:

Т. Н. Казарихина – кандидат педагогических наук,
учитель математики и информатики высшей квалификационной категории,
заместитель директора АНО СОШ «Димитриевская», доцент МПГУ;

Е. В. Лукьянова – кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математического анализа им. П.С. Новикова ИМИИ МПГУ,
учитель высшей категории

Ниренбург, Т. Л.

Н68 Геометрия. 9 класс. Тетрадь-тренажёр. Углублённый уровень / Т. Л. Ниренбург. — Эл. изд. — 1 файл pdf : 107 с. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2025. — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-907985-75-9

Тетрадь-тренажёр — это пособие для изучения геометрии в 9 классе по углублённой программе. Задания охватывают все основные темы углублённого курса, для удобства использования все задания представлены в виде таблиц. Выполнять решения можно непосредственно в тетради-тренажёре. Пособие ориентировано на последний ФГОС для углублённой программы с опорой на учебник «Геометрия: 7–9 классы» (Атанасян Л. С. и др.), включённый в Федеральный перечень учебников. Также возможно использование этих материалов с другими учебниками и учебными пособиями по геометрии 9 класса.

Пособие адресовано, в первую очередь, учителям, работающим по углублённой программе, но будет также полезно репетиторам, учащимся и их родителям.

УДК 514(075.3)

ББК 22.1я721

Электронное издание на основе печатного издания: Геометрия. 9 класс. Тетрадь-тренажёр. Углублённый уровень / Т. Л. Ниренбург. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2025. — 104 с. — ISBN 978-5-907985-26-1. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-907985-75-9

© ООО «Издательство «Интеллект-Центр», 2025

© Ниренбург Т. Л., 2025

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тетрадь-тренажёр представляет собой пособие по решению задач, предназначенное помочь учащимся освоить углублённую школьную программу по математике. Задачи разбиты на пять разделов в соответствии с программой: элементы тригонометрии в геометрии; векторный метод; метод координат; правильные многоугольники, длина окружности и площадь круга; преобразования плоскости. В каждом разделе предложены задачи для отработки навыков решения основных типов задач. Задачи носят скорее технический, чем качественный характер, но владение техническими навыками очень часто помогает в решении качественных задач. Кроме того, в пособии предлагаются и вопросы качественного характера, но таких задач меньше. Для достижения устойчивого результата почти в каждом задании предлагается несколько однотипных задач или несколько разных задач, обыгрывающих один и тот же вопрос.

Данная тетрадь-тренажёр является продолжением аналогичного пособия для 7 и 8 классов, а также серии тетрадей-тренажёров для базовой программы по математике. Это пособие не заменяет учебник (с большим количеством объяснений теоретических аспектов) и сборники задач, ориентированных на учебники, но гармонично дополняет их. Некоторые задания обучающимся по углублённой программе могут показаться простыми. Но для успешного решения более сложных задач навык решения основных типов «простых» задач должен быть доведён почти до автоматизма.

Для удобства оформления решений задачи сгруппированы в таблицы. При этом предполагается, что решения будут выполняться непосредственно в этой тетради. Такое оформление упрощает проверку результатов учителем и обучающимся.



Каждый раздел содержит теоретические сведения, которые отмечены знаком , задания для отработки навыков и задания «Проверьте себя» для проверки степени усвоения материала (к последним в конце пособия в основном приведены ответы и подсказки к решению). В некоторых заданиях приведены примеры решения задач (такие примеры выделены серым цветом). Задания предполагаются выполнять последовательно, что способствует достижению лучшего результата.

При выполнении заданий обучающиеся выполняют большую работу, но при этом предложенный способ оформления решений упрощает учителю проверку результатов. Легко организовывать перекрёстную проверку учениками.

Тетрадь-тренажёр удобна в использовании на уроках, для выполнения домашних заданий, для отработки материала учащимися, вынужденно пропустившими занятия. Она также поможет повторить материал 9-го класса при подготовке к экзаменам.

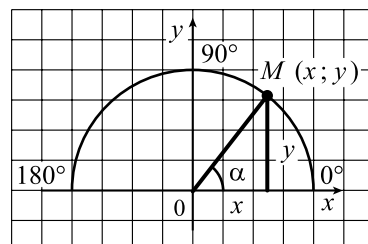
ТРИГОНОМЕТРИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



Важно знать:

В прямоугольной системе координат Oxy на единичной полуокружности (радиус равен 1) выберем точку $M(x; y)$. Для любого угла α из промежутка $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$:



- **синусом** угла α называется ордината точки M ;

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

- **косинусом** угла α называется абсцисса точки M ;

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1; \cos \alpha \geq 0 \text{ при } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ;$$

$$\cos \alpha \leq 0 \text{ при } 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

- **тангенсом** угла α ($\alpha \neq 90^\circ$) называется отношение синуса угла α к косинусу угла α ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0, \operatorname{tg} 90^\circ \text{ не определён}, \operatorname{tg} 180^\circ = 0.$$

- **котангенсом** угла α называется отношение косинуса угла α к синусу угла α ;

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 0^\circ \text{ не определён}, \operatorname{ctg} 90^\circ = 0, \operatorname{ctg} 180^\circ \text{ не определён}.$$

Основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Значит, для допустимых углов $1 + \sin^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}$; $1 + \cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Формулы приведения:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \text{ при } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ;$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \text{ при } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

Задание 1

Заполните таблицу, если известно, что $\alpha < 90^\circ$.

$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
	$\frac{8}{17}$		
$\frac{1}{5}$			
		$\frac{4}{3}$	
			$\frac{5}{12}$
	1		

Задание 2

Заполните таблицу, указав неизвестные величины, если известно, что $\alpha \geq 90^\circ$.

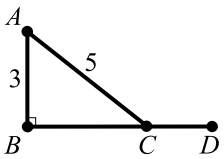
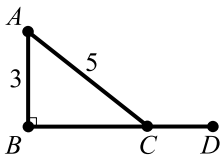
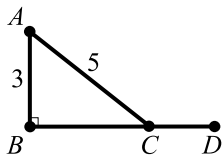
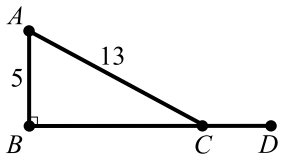
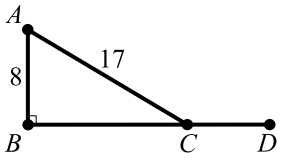
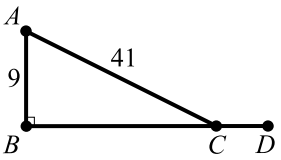
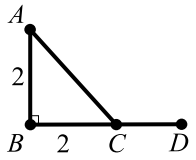
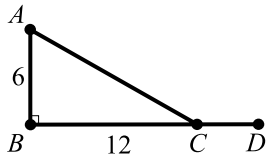
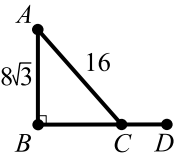
$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
	$-\frac{3}{5}$		
$\frac{5}{13}$			
		$-\frac{2}{3}$	
			$-\frac{5}{4}$
0			

Задание 3

Найдите указанную величину, записав решение.

Важно помнить: в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B

$$\sin A = \frac{BC}{AC}; \cos A = \frac{AB}{AC}; \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AB}; \operatorname{ctg} A = \frac{AB}{BC}.$$

1) $\cos ACB$  По теореме Пифагора для прямоугольного $\triangle ABC$ $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Тогда $\cos ACB = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$. Ответ: $\frac{4}{5}$ (или 0,8).	2) $\cos CAB$ 	3) $\sin DCA$ 
4) $\operatorname{tg} CAB$ 	5) $\operatorname{ctg} ACD$ 	6) $\cos ACD$ 
7) $\sin ACB$ 	8) $\cos ACD$ 	9) $\operatorname{tg} ACD$ 

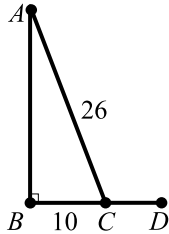
Задание 4

Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) В прямоугольном треугольнике синус острого угла равен отношению длины катета, противолежащего данному углу, к длине гипотенузы	
2) В прямоугольном треугольнике котангенс острого угла равен отношению длины катета, противолежащего данному углу, к длине катета, прилежащего данному углу.	
3) Для допустимых углов верна формула $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	
4) Котангенс угла 90° не определён	
5) Синус угла треугольника может быть равен $-0,5$	
6) Тангенс угла треугольника может быть равен $\frac{145}{13}$	
7) Синус угла 37° равен косинусу угла 53°	
8) Косинус угла 42° равен синусу угла 132°	
9) Существует тупой угол, тангенс и котангенс которого равны	
10) Существует тупой угол, синус и косинус которого равны	
11) $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$	
12) $\operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}$	

Б) Найдите неизвестные величины.

1) $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ $\sin \alpha = ?$; $\operatorname{tg} \alpha = ?$ Ответ: _____	2) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$ $\sin \alpha = ?$; $\cos \alpha = ?$ Ответ: _____	3) $\sin DCA$  Ответ: _____
--	--	--

ТРИГОНОМЕТРИЯ В ВЫЧИСЛЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ

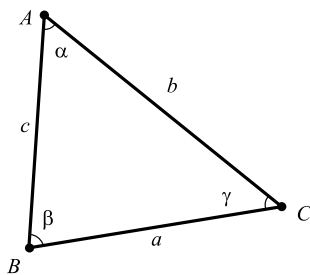
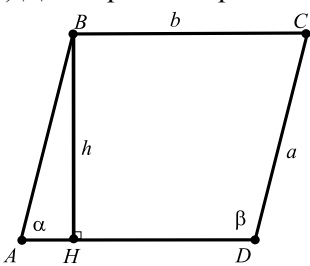
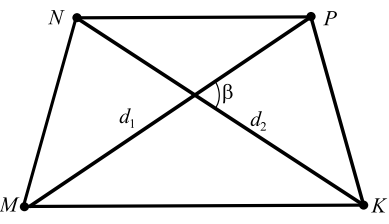


Важно знать:

- Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$.
- Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними: $S = ab \cdot \sin \alpha$
- Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \varphi$

Задание 5

Заполните пропуски в таблице.

1) Дан треугольник		a	b	c	S	$\sin \alpha$	$\sin \gamma$
		8	5				0,4
		10			33	–	0,6
		–	15	7		2/3	–
		–	12	21	84		
			–	24		1/3	8/15
2) Дан параллелограмм		a	b	S	$\sin \alpha$	$\sin \beta$	h
		6	10				
		5	8		0,3		
			8	48		0,2	
		10	8				5
3) Дан четырёхугольник		d_1	d_2	$\sin \beta$		S	
		8		$\frac{1}{3}$			
		5		$\frac{2}{3}$		30	
		7	12			21	
			14	$\frac{1}{4}$		56	

Задание 6
Найдите площадь данной фигуры.

1) Дан треугольник.
Найдите S

Ответ: _____

2) Дан ромб.
Найдите S

Ответ: _____

3) Дана трапеция.
Найдите S

Ответ: _____

4) Дан параллелограмм.
Найдите S

Ответ: _____

5) Дан равносторонний треугольник.
Найдите S

Ответ: _____

6) Дана трапеция с диагоналями $5\sqrt{6}$ и $10\sqrt{2}$.
Найдите S

Ответ: _____

7) Дана трапеция.
Найдите S

Ответ: _____

8) Дан треугольник.
Сторона клетки равна 1.
Найдите $\sin \angle ACB$

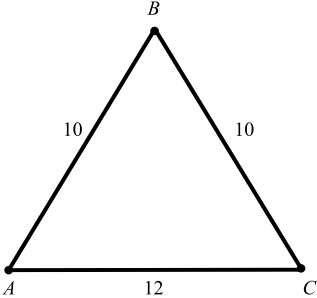
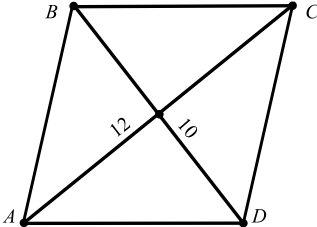
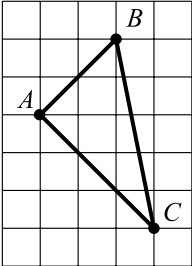
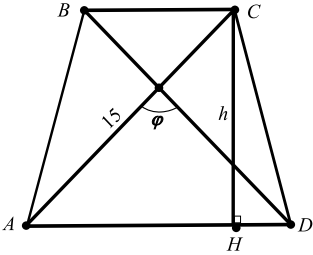
Ответ: _____

Задание 7
 Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Существует параллелограмм, площадь которого равна половине произведения его диагоналей	
2) Биссектриса треугольника делит его на два треугольника, площади которых пропорциональны сторонам треугольника	
3) При фиксированных значениях длин диагоналей четырёхугольника площадь этого четырёхугольника будет наибольшей, если диагонали перпендикулярны	
4) При фиксированных длинах двух сторон треугольника его площадь будет увеличиваться при увеличении угла между этими сторонами	

Б) Выполните задания.

1) Дан треугольник. По данным чертежа найдите $\sin ABC$  Ответ: _____	2) Дан ромб с диагоналями 10 и 12. Найдите $\sin BAD$  Ответ: _____
3) Сторона клетки равна 1. Найдите $\sin ACB$  Ответ: _____	4) Дана равнобедренная трапеция, $\sin \varphi = \frac{24}{25}$. Найдите h  Ответ: _____

ТЕОРЕМА СИНУСОВ И КОСИНУСОВ



Важно знать:

В треугольнике ABC:

- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусов со следствием,

R – радиус описанной около треугольника окружности), $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$;

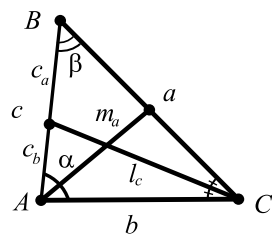
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ (теорема косинусов);

- $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$ (формула вычисления длины медианы, длины биссектрисы);

- $l_c = \sqrt{ab - c_a c_b}$ (формула вычисления биссектрисы); $a : b = c_a : c_b$.

В параллелограмме:

- $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$ (a, b – стороны параллелограмма, d_1, d_2 – его диагонали)



Задание 8

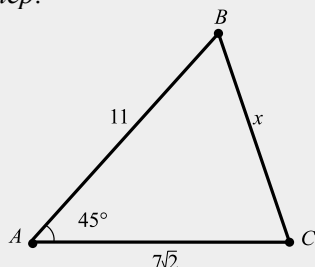
Заполните пустые клетки таблицы, используя теорему синусов.

a	c	α	β	γ	R
8		45°		30°	30°
6		135°			
	10	45°	105°		
	12		15°	45°	
			30°	120°	
		60°	45°		8

Задание 9

Вычислите x , используя теорему косинусов.

Пример:



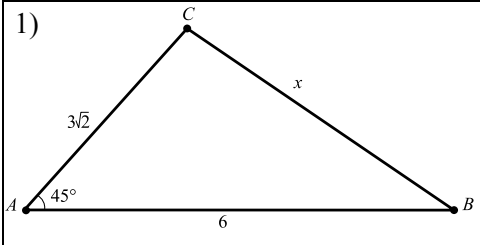
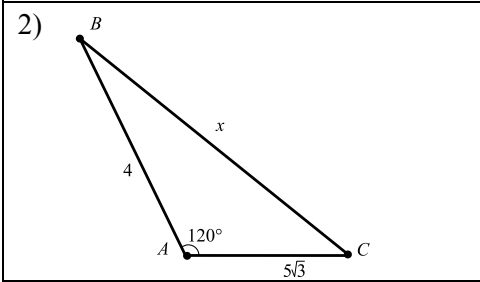
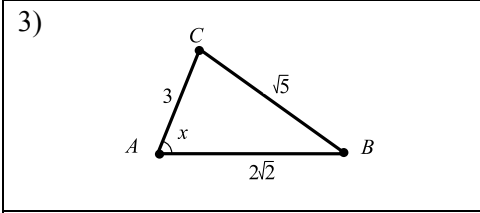
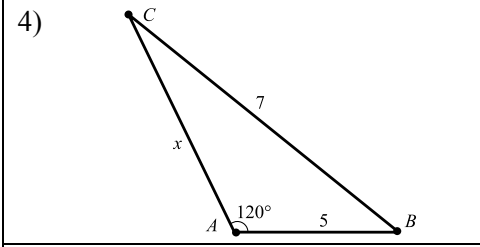
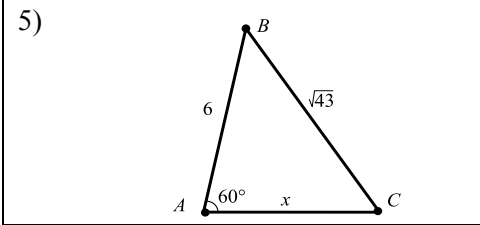
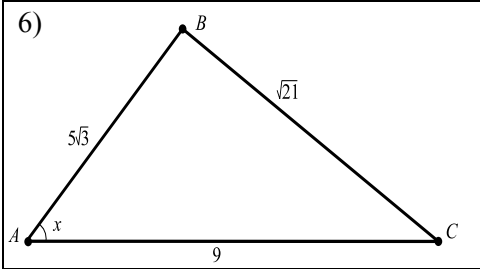
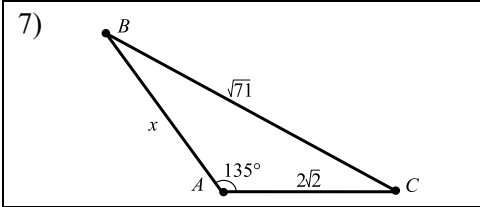
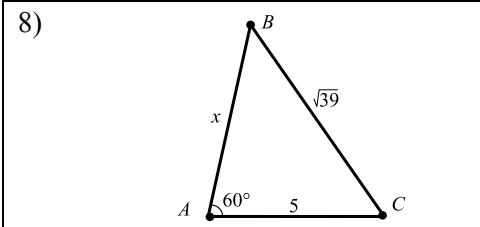
По теореме косинусов выполнено:

$$x^2 = 11^2 + (7\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 11 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ;$$

$$x^2 = 121 + 98 - 154 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 65;$$

$$x = \sqrt{65}.$$

Ответ: $\sqrt{65}$

1) 	Ответ: _____
2) 	Ответ: _____
3) 	Ответ: _____
4) 	Ответ: _____
5) 	Ответ: _____
6) 	Ответ: _____
7) 	Ответ: _____
8) 	Ответ: _____

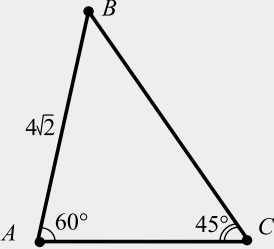
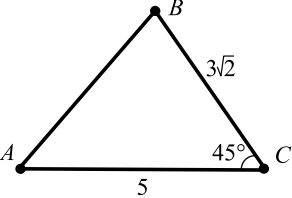
Задание 10

Определите вид треугольника по длинам его сторон.

<i>Пример:</i> $a=5; b=4; c=2\sqrt{2}$ <i>Решение.</i> Самая большая сторона – a ; $a^2=25; b^2+c^2=24$. Получаем $a^2 > b^2+c^2$, значит, $\cos \alpha < 0$, тогда $\alpha > 90^\circ$, то есть треугольник – тупоугольный. Ответ: тупоугольный	1) $a=11; b=8; c=9$ Ответ: _____	2) $a=11; b=8; c=15$ Ответ: _____
3) $a=11; b=8; c=5$ Ответ: _____	4) $a=40; b=9; c=41$ Ответ: _____	5) $a=13; b=19; c=15$ Ответ: _____

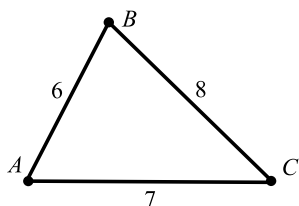
Задание 11

Вычислите неизвестные величины по данным чертежа.

<i>Пример.</i> Найдите: 1. BC; 2. R; 3. h_c.  <i>Решение:</i> 1. $\frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, откуда $BC = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$; 2. $R = \frac{AC}{2\sin 45^\circ} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 2}{2\sqrt{2}} = 4$; 3. $h_c = BC \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$	1) Найдите: 1. AB; 2. R; 3. S; 4. $\sin A$ 
--	---

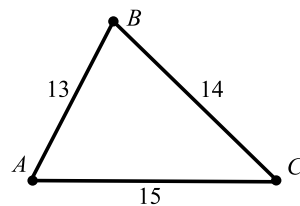
2) Найдите:

1. $\cos A$;
2. $\sin A$;
3. R ;
4. l_b ;
5. m_b



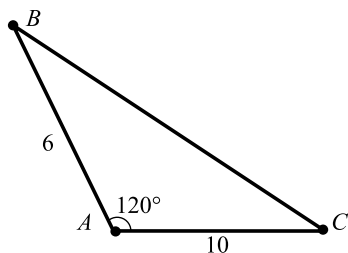
3) Найдите:

1. S ;
2. R ;
3. $\sin B$;
4. h_a ;
5. l_a



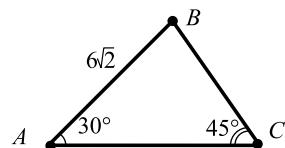
4) Найдите:

1. BC ;
2. m_a ;
3. R ;
4. h_b



5) Найдите:

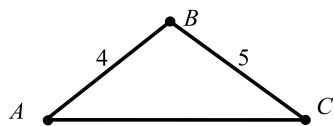
1. BC ;
2. R ;
3. h_b ;
4. AC ;
5. $\sin 75^\circ$



6) Дано: $S_{ABC} = 5\sqrt{5}$; $\cos B < 0$

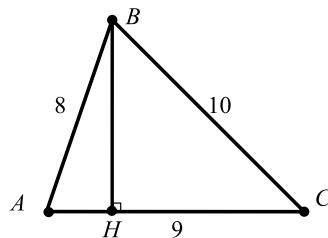
Найдите:

1. $\angle B$
2. AC ;
3. m_b ;
4. R



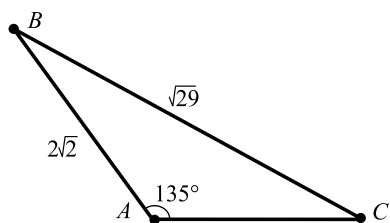
7) Найдите:

1. $\cos B$;
2. $\cos A$;
3. m_a ;
4. l_b ;
5. AH



8) Найдите:

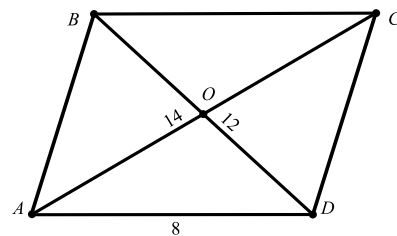
1. AC ;
2. $\sin B$;
3. S_{ABC} ;
4. R ;
5. m_a



9) Дан параллелограмм.

Найдите:

1. DC ;
2. $\cos ADB$;
3. $\cos AOD$;
4. $\sin AOD$;
5. S_{ABCD}

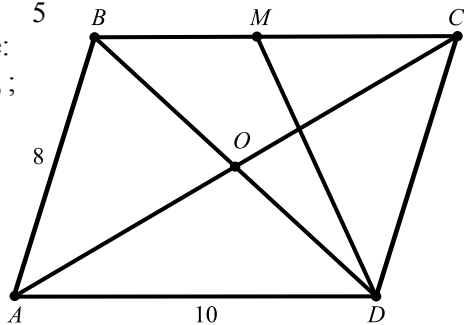


10) Дан параллелограмм, M – середина BC ,

$$\cos \angle BAD = \frac{4}{5}.$$

Найдите:

1. S_{ABCD} ;
2. BD ;
3. AC ;
4. DM ;



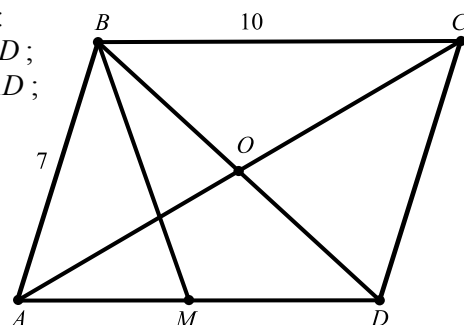
5. R (радиус описанной окружности $\triangle ABD$)

11) Дан параллелограмм, M – середина AD ,

$$S_{ABCD} = 14\sqrt{21}.$$

Найдите:

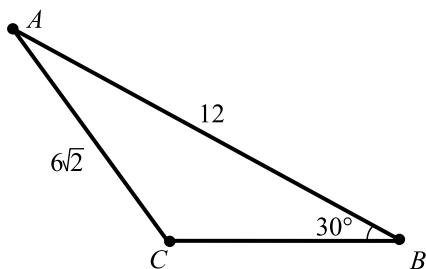
1. $\sin \angle BAD$;
2. $\cos \angle BAD$;
3. BD ;
4. AC ;
5. BM



12) Известно, что $AB > BC$.

Найдите:

1. $\angle A$;
2. R ;
3. BC ;
4. S

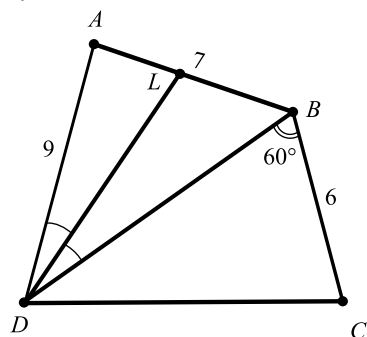


13) Известно, что $\cos \angle ABD = \frac{2}{3}$,

DL – биссектриса угла ADB .

Найдите:

1. BD ;
2. $S_{\triangle ABD}$;
3. DL ;
4. CB ;
5. $\angle C$;
6. R (радиус описанной окружности $\triangle BCD$)



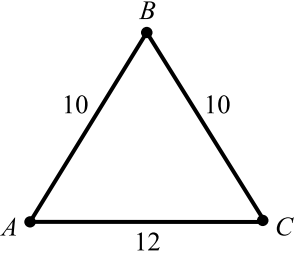
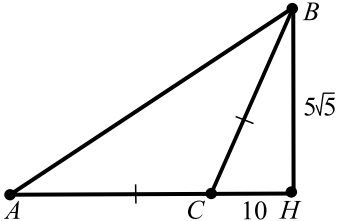
Задание 12

Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Теорему Пифагора можно считать частным случаем теоремы косинуса	
2) Если сумма квадратов двух сторон треугольника меньше квадрата третьей стороны треугольника, то этот треугольник – остроугольный	
3) Зная два угла треугольника и сторону, противолежащую одному из них, можно найти площадь треугольника	
4) Из теоремы синусов следует, что синусы двух углов треугольника пропорциональны сторонам, лежащим напротив этих углов	

Б) Выполните задания.

1) По данным чертежа найдите: $\cos B$; R; m_a 	Ответ: _____
2) По данным чертежа найдите: $\cos ACB$; CL – биссектрису $\triangle BCH$; $\sin BCL$ 	Ответ: _____

ВЕКТОРЫ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ



Важно знать:

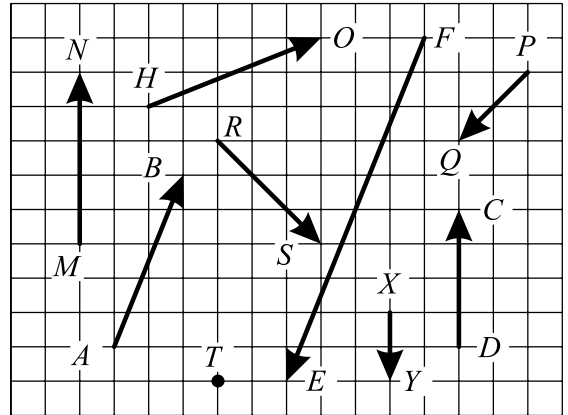
- *Направленный отрезок (вектор) – это отрезок, концы которого упорядочены ($\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ – разные направленные отрезки). Любая точка плоскости в этом контексте рассматривается как отрезок с совпадающими концами и считается нулевым вектором (обозначается $\vec{0}$).*
- *На чертежах направление отрезка указывается стрелкой .*
- *Длиной или модулем вектора называется длина изображающего его отрезка (обозначается $|\vec{a}|, |\overrightarrow{AB}|$).*
- *Выделяют векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых – коллинеарные, в т.ч. сонаправленные и противоположно направленные (обозначения $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \downarrow \vec{b}$). Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором.*
- *Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.*
- *Векторы называются противоположными, если они противоположно направлены и их длины равны, нулевой вектор противоположен сам себе (вектор, противоположный $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$).*

Задание 13

Выполните задания. Сторона клетки равна 1.

Есть ли среди указанных векторов равные? _____

Есть ли среди указанных векторов противоположные? _____



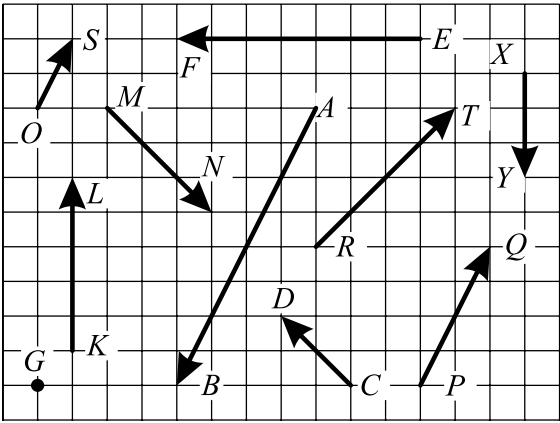
Укажите векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{MN}$ _____ _____ _____	Укажите все возможные пары противоположно направленных векторов _____ _____ _____	Укажите все возможные пары сонаправленных векторов (без нулевого) _____ _____ _____
Вычислите длины векторов: 1. $\overrightarrow{MN} =$ _____ 2. $\overrightarrow{DC} =$ _____ 3. $\overrightarrow{XY} =$ _____	Вычислите длины векторов: 1. $\overrightarrow{PQ} =$ _____ 2. $\overrightarrow{TT} =$ _____ 3. $\overrightarrow{RS} =$ _____	Вычислите длины векторов: 1. $\overrightarrow{AB} =$ _____ 2. $\overrightarrow{HO} =$ _____ 3. $\overrightarrow{FE} =$ _____

Задание 14

Выполните задания. Сторона клетки равна 1.

Есть ли среди указанных векторов равные? _____

Есть ли среди указанных векторов противоположные? _____



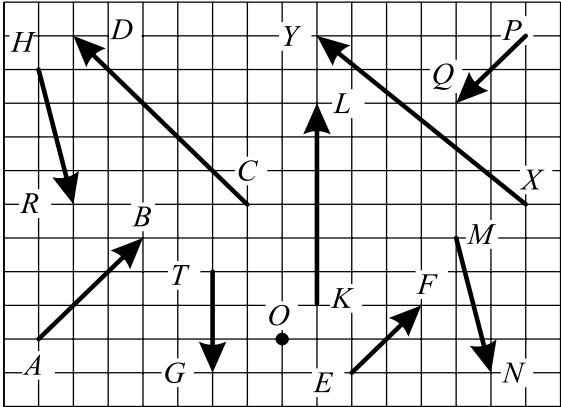
Укажите векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB}$. _____ _____ _____	Укажите все возможные пары противоположно направленных векторов _____ _____ _____	Укажите все возможные пары сонаправленных векторов (без нулевого) _____ _____ _____
Вычислите длины векторов: 1. $ \overrightarrow{KL} =$ _____ 2. $ \overrightarrow{EF} =$ _____ 3. $ \overrightarrow{XY} =$ _____	Вычислите длины векторов: 1. $ \overrightarrow{MN} =$ _____ 2. $ \overrightarrow{RT} =$ _____ 3. $ \overrightarrow{GG} =$ _____	Вычислите длины векторов: 1. $ \overrightarrow{AB} =$ _____ 2. $ \overrightarrow{CD} =$ _____ 3. $ \overrightarrow{PQ} =$ _____

Задание 15

Выполните задания. Сторона клетки равна 1.

Есть ли среди указанных векторов равные? _____

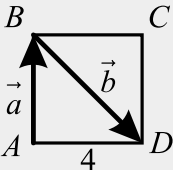
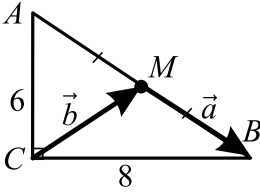
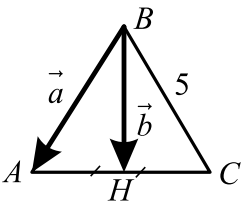
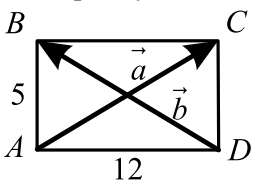
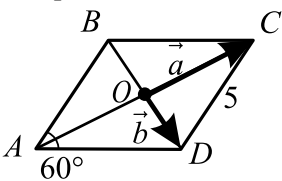
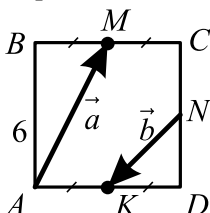
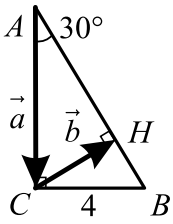
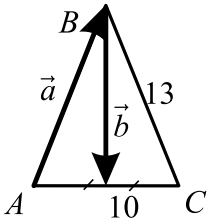
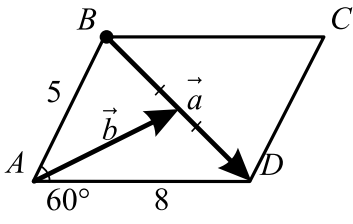
Есть ли среди указанных векторов противоположные? _____

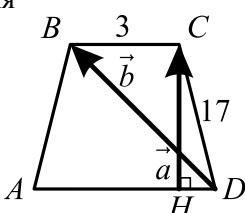
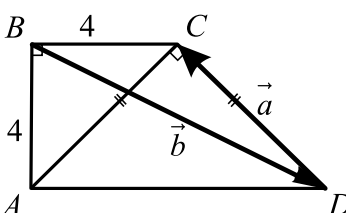
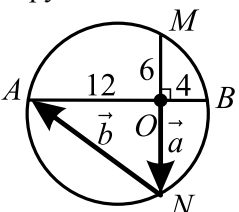


Укажите векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB}$. _____ _____ _____	Укажите все возможные пары противоположно направленных векторов _____ _____ _____	Укажите все возможные пары сонаправленных векторов (без нулевого) _____ _____ _____
Вычислите длины векторов: 1. $ \overrightarrow{TG} =$ _____ 2. $ \overrightarrow{OO} =$ _____ 3. $ \overrightarrow{KL} =$ _____	Вычислите длины векторов: 1. $ \overrightarrow{AB} =$ _____ 2. $ \overrightarrow{CD} =$ _____ 3. $ \overrightarrow{PQ} =$ _____	Вычислите длины векторов: 1. $ \overrightarrow{MN} =$ _____ 2. $ \overrightarrow{XY} =$ _____ 3. $ \overrightarrow{EF} =$ _____

Задание 16

Найдите длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, записав решение.

$ABCD$ – квадрат  $\vec{a} = AB = AD = 4$ По теореме Пифагора для $\triangle ABD$ $BD^2 = AD^2 + AB^2$. Значит, $\vec{b} = BD = 4\sqrt{2}$. Ответ: $\vec{a} = 4$; $\vec{b} = 4\sqrt{2}$	1) $\triangle ABC$ – прямоугольный  Ответ: _____	2) $\triangle ABC$ – равносторонний  Ответ: _____
3) $ABCD$ – прямоугольник  Ответ: _____	4) $ABCD$ – ромб  Ответ: _____	5) $ABCD$ – квадрат  Ответ: _____
6) $\triangle ABC$ – прямоугольный  Ответ: _____	7) $\triangle ABC$ – равносторонний  Ответ: _____	8) $ABCD$ – параллелограмм  Ответ: _____

9) $ABCD$ – равнобедренная трапеция  Ответ: _____	10) $ABCD$ – трапеция  Ответ: _____	11) Дана окружность  Ответ: _____
---	---	--

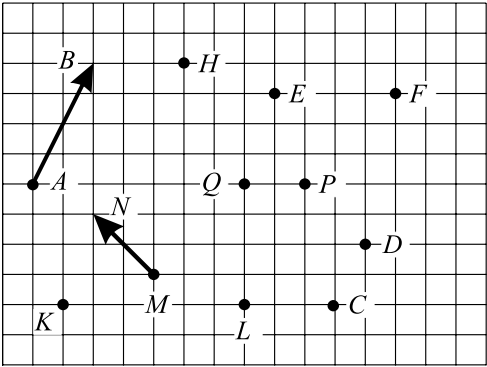
Задание 17

Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Для того, чтобы векторы были коллинеарны, необходимо, чтобы они лежали на параллельных прямых	
2) Для того, чтобы векторы были равны, достаточно, чтобы они лежали на одной прямой и имели равные длины	
3) Для того, чтобы векторы были противоположно направленными, необходимо, чтобы они были коллинеарными	
4) Существует вектор, сонаправленный с любым другим вектором	
5) Существуют сонаправленные векторы, длины которых не равны	
6) Существуют равные противоположно направленные векторы	
7) Существуют противоположно направленные векторы равной длины	
8) Существуют неколлинеарные векторы равной длины	
9) Существуют равные векторы, из которых можно составить равносторонний треугольник	
10) Существует четырёхугольник, стороны которого образованы двумя парами равных векторов	
11) Если два вектора не сонаправлены и имеют равные длины, то они противоположные	
12) Для того, чтобы два вектора были противоположными, достаточно, чтобы они были коллинеарными	

Б) На чертеже отмечены несколько точек. Укажите ненулевые векторы с началом и концом в отмеченных точках, которые:



сонаправлены вектору $\overrightarrow{AB}$	
противоположно направлены вектору $\overrightarrow{AB}$	
равны вектору $\overrightarrow{AB}$	
сонаправлены вектору $\overrightarrow{MN}$	
противоположно направлены вектору $\overrightarrow{MN}$	
равны вектору $\overrightarrow{MN}$	
сонаправлены вектору $\overrightarrow{MQ}$	
равны вектору $\overrightarrow{MQ}$	
имеют начало в точке K и сонаправлены с $\overrightarrow{QP}$	
коллинеарны вектору $\overrightarrow{KC}$	
противоположны вектору $\overrightarrow{FP}$	

В) Найдите длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по данным чертежа.

1) $ABCD$ – прямоугольник, $MN = 10$

Ответ: _____

2) $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $|CD| = 13$

Ответ: _____

3) $\triangle ABC$ вписан в окружность

Ответ: _____

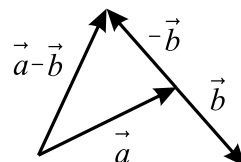
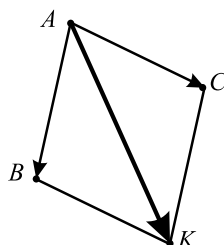
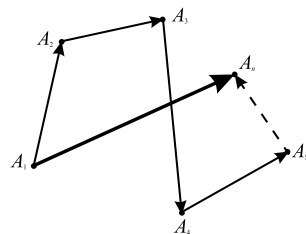
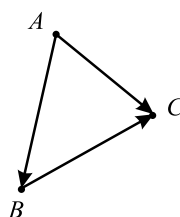
ДЕЙСТВИЯ С ВЕКТОРАМИ



Важно знать:

- Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$. Это правило называется правилом треугольника. Аналогично можно сложить более двух векторов (по правилу многоугольника): $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.
- Два неколлинеарных вектора можно сложить по правилу параллелограмма: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}$, где AK – диагональ параллелограмма $ABKC$.
- Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна сумме вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного вектору $\vec{b}$.
- Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k (обозначается $k\vec{a}$) называется вектор $\vec{b}$, определяющийся двумя условиями:
 - $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$
 - $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$ при $k \geq 0$; $\vec{b} \downarrow \downarrow \vec{a}$ при $k < 0$

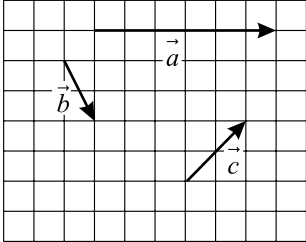
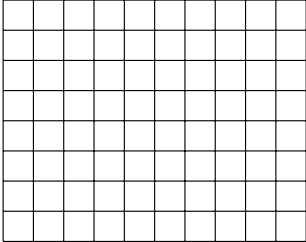
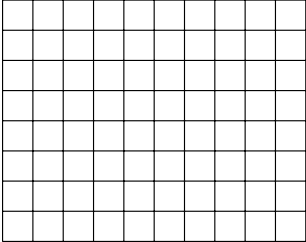
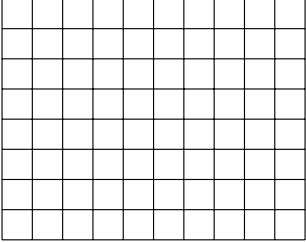
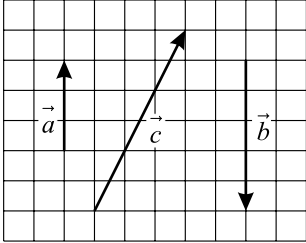
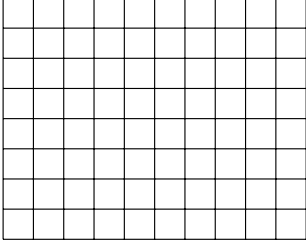
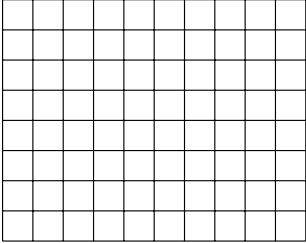
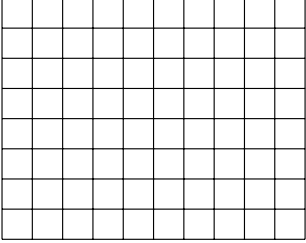
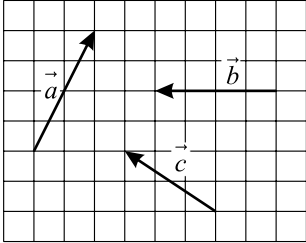
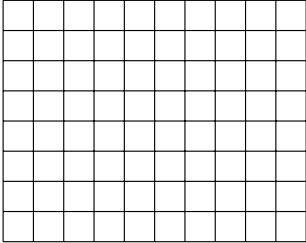
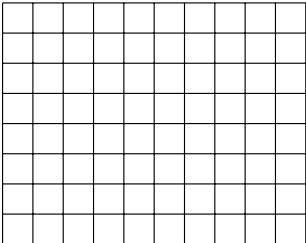
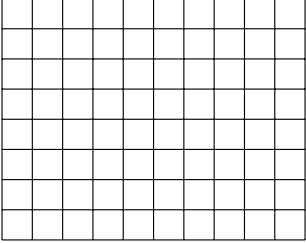
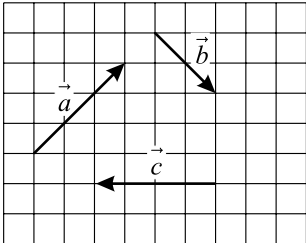
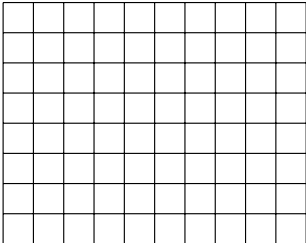
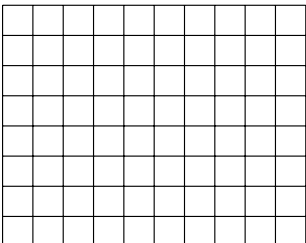
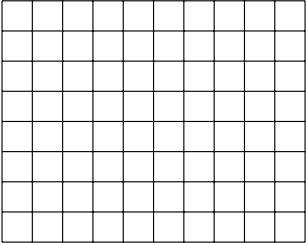
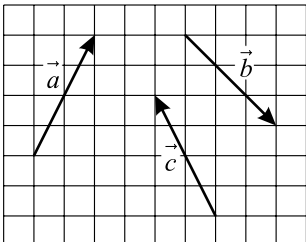
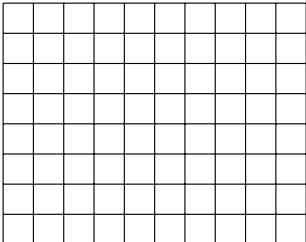
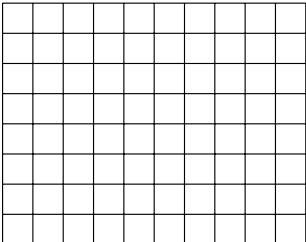
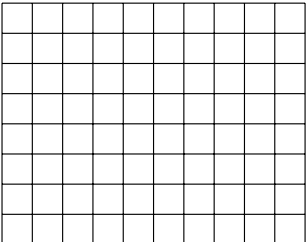
Произведение нулевого вектора на любое число считается равным нулевому вектору.
- Для операций с векторами справедливы следующие основные свойства:
 - $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
 - $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
 - $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$;
 - $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$;
 - $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

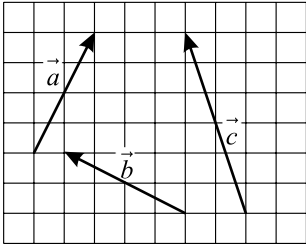
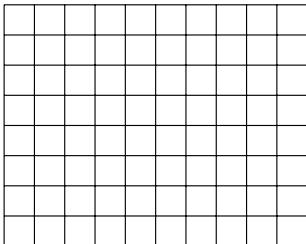
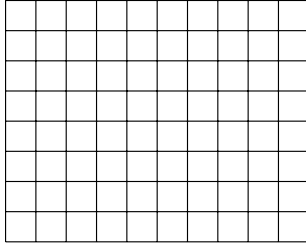
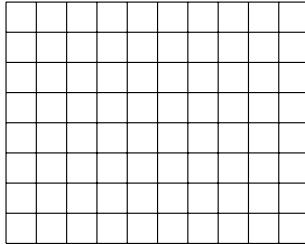
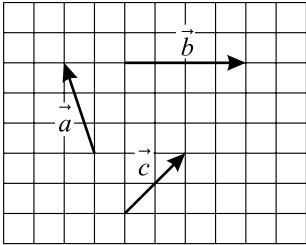
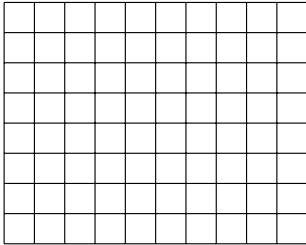
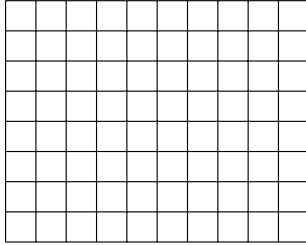
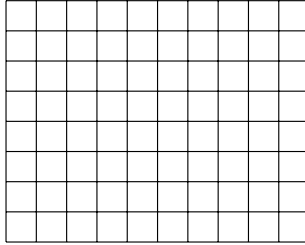


Задание 18

Постройте вектор $\vec{x}$ по данным чертежа.

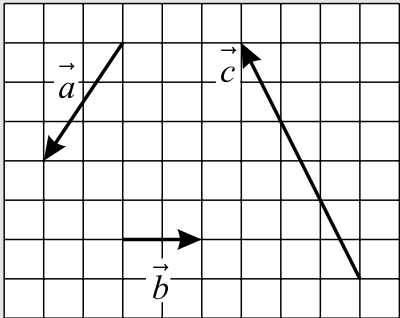
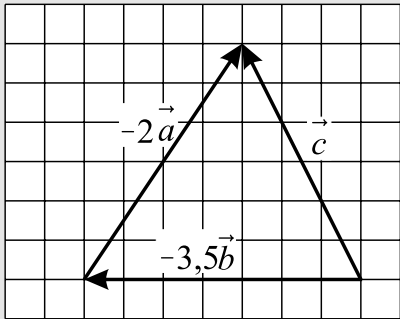
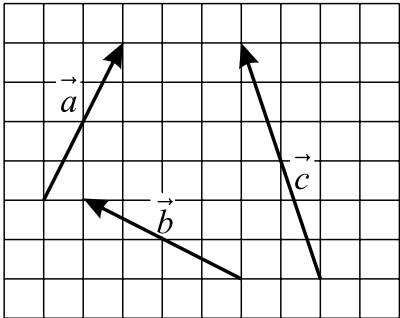
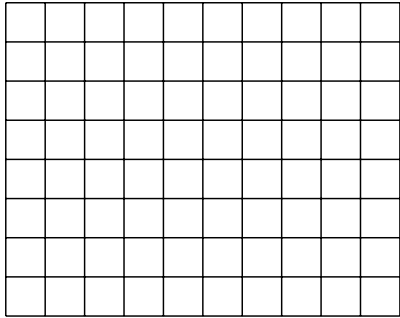
Дано:	$\vec{x} = \vec{a} + \vec{c}$	$\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

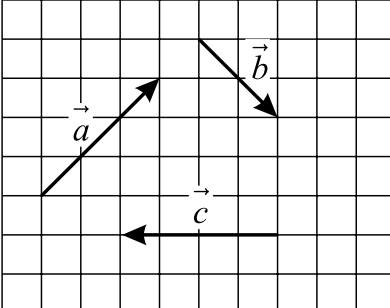
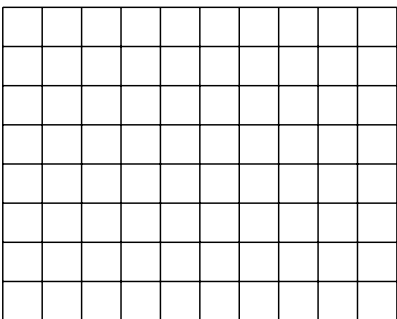
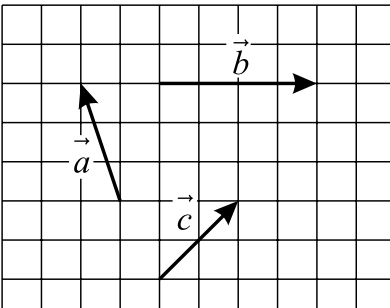
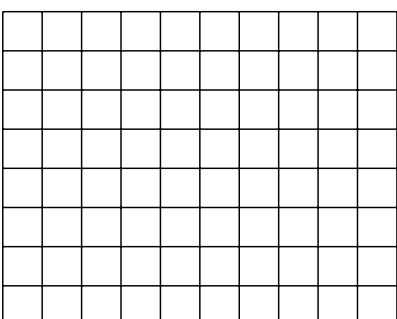
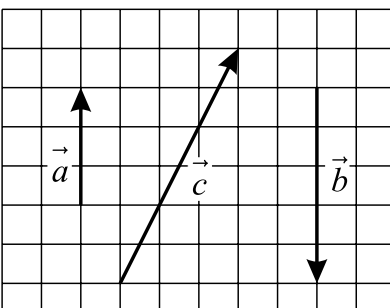
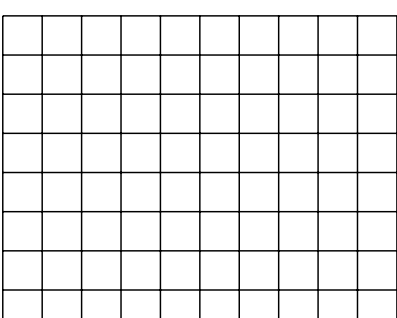
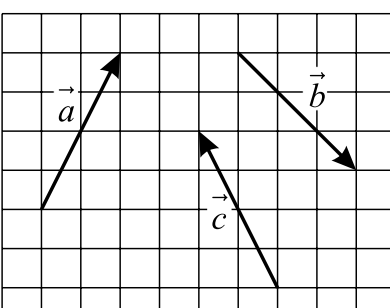
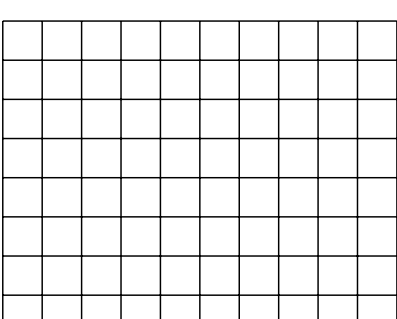
1) Дано:	$\vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$	$\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$	$\vec{x} = 2\vec{c} + 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$
			
2) Дано:	$\vec{x} = \vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$	$\vec{x} = \vec{c} - 2\vec{a}$	$\vec{x} = \frac{4}{5}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$
			
3) Дано:	$\vec{x} = \vec{b} - \vec{c}$	$\vec{x} = \vec{c} + 0,5\vec{a}$	$\vec{x} = 2\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$
			
4) Дано:	$\vec{x} = \vec{c} - \vec{b}$	$\vec{x} = 1,5\vec{b} - \vec{a}$	$\vec{x} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
			
5) Дано:	$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$	$\vec{x} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$	$\vec{x} = \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$
			

6) Дано:	$\vec{x} = \vec{a} - 0,5\vec{c}$	$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{c} - 0,5\vec{b}$	$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
			
7) Дано:	$\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{c}$	$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} - \frac{3}{4}\vec{b}$	$\vec{x} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{b}$
			

Задание 19

По данным чертежа найдите такие значения коэффициентов k и m , чтобы выполнялось равенство из условия, и сделайте соответствующий чертёж.

Пример Дано: 	Условие: $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ Ответ: $k = -2$; $m = -3,5$	
Дано: 	Условие: $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ Ответ: $k =$ _____ $m =$ _____	

Дано: 	Условие: $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ Ответ: $k =$ _____ $m =$ _____	
Дано: 	Условие: $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ Ответ: $k =$ _____ $m =$ _____	
Дано: 	Условие: $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ Ответ: $k =$ _____ $m =$ _____	
Дано: 	Условие: $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ Ответ: $k =$ _____ $m =$ _____	

Задание 20
Упростите выражение.

1) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BF}) - (\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NB}) + (\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{KL}) =$ _____

2) $(\overrightarrow{GN} - \overrightarrow{AH}) - (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{TF} - \overrightarrow{KF}) - (\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{GP}) =$ _____

Задание 21
По данным чертежа найдите неизвестные величины.

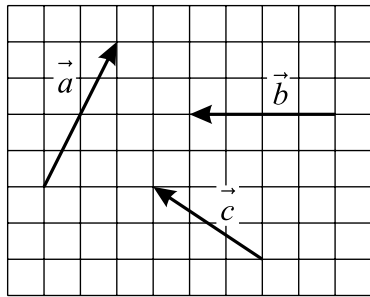
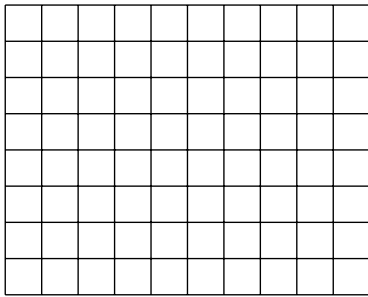
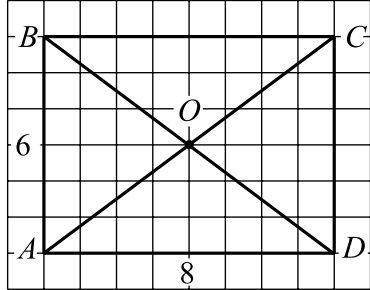
$AB = 6; AC = 8$	$AC = 6; BC = 8$	$AB = 12$	$ABCD$ – трапеция
$ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} =$ _____	$ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HA} =$ _____	$ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} =$ _____	$ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} =$ _____
$ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} =$ _____	$ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HA} =$ _____	$ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} =$ _____	$ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} =$ _____
$ \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NM} =$ _____	$ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} =$ _____	$ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} =$ _____	$ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} =$ _____
$ \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$ _____	$ \overrightarrow{0,5CB} + \overrightarrow{HC} =$ _____	$ \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{0,5BA} =$ _____	$ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} =$ _____
$ \overrightarrow{AN} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$ _____	$ \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$ _____	$ \overrightarrow{AA_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} =$ _____	$ \overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{DB} =$ _____
$ \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AC} =$ _____	$ \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} =$ _____	$ \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1} =$ _____	$ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} =$ _____
$ \overrightarrow{2BN} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$ _____	$ \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{HA} =$ _____	$ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} =$ _____	$ \frac{7}{4}\overrightarrow{AO} - \frac{7}{8}\overrightarrow{AD} =$ _____

Задание 22
 Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Можно найти сумму любых векторов по правилу параллелограмма	
2) При сложении двух векторов длина вектора-суммы всегда не больше суммы длин исходных векторов	
3) Вектор и ему противоположный – коллинеарны	
4) Чем меньше число k , тем меньше длина вектора $k\vec{a}$	
5) Существует вектор, который не меняется при умножении на любое число	
6) Существует число, при умножении на которое любой вектор остается прежним	
7) Векторы можно складывать в любом порядке (результат не изменяется)	
8) При сложении нескольких неколлинеарных векторов вектор-сумма может быть коллинеарен одному из исходных векторов	
9) При умножении вектора на число длина получаемого вектора равна произведению числа на длину исходного вектора	
10) Длина вектора $\vec{a}$ равна 7, длина вектора $\vec{b}$ равна 5. Сколько различных целых значений может принимать длина вектора $\vec{a} + \vec{b}$?	

Б) Выполните задания.

Дано (для пунктов 1 и 2) 	1) Постройте вектор $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{a}$. 	2) Подберите такие k и m, чтобы выполнялось равенство: $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ Ответ: $k =$ _____ $m =$ _____
Дан прямоугольник $ABCD$ 	3) Найдите величины: 1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$ _____ 2. $\overrightarrow{CB} - 0,5\overrightarrow{DB} =$ _____ 3. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} =$ _____ 4. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$ _____ 5. $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{BC} =$ _____	

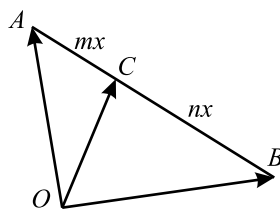
РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ



Важно знать:

- Если вектор $\vec{a}$ представлен в виде $\vec{a} = k_1 \vec{x}_1 + k_2 \vec{x}_2 + \dots + k_n \vec{x}_n$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен на составляющие векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.
- На плоскости любые два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, взятые в указанном порядке, называются базисом (обозначается $(\vec{a}; \vec{b})$). Любой вектор на плоскости можно разложить по базису, причём единственным образом. Коэффициенты разложения называются координатами вектора в данном базисе. Например, если $\vec{x} = k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b}$, то координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b})$ равны $(k_1; k_2)$.
- Справедливы свойства (для векторов, рассматриваемых в одном базисе):
 1. Векторы равны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты равны.
 2. Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны. Причем, если коэффициент пропорциональности отрицателен – векторы противоположно направлены, в противном случае – сонаправлены.
 3. При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.
 4. При сложении векторов их координаты складываются.
 5. При вычитании векторов их координаты вычитаются.
- Если точка C лежит на отрезке AB и делит его в данном отношении $AC:CB = m:n$, то для любой точки O плоскости справедливо

$$\vec{OC} = \frac{n}{n+m} \vec{OA} + \frac{m}{n+m} \vec{OB}.$$



Задание 23

Даны координаты векторов $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ в некотором базисе $(\vec{a}; \vec{b})$.

Найдите координаты векторов $\vec{p}; \vec{d}; \vec{v}$ в этом базисе.

	$\vec{p} = -\vec{y}$	$\vec{d} = 2\vec{x} + \vec{y}$	$\vec{v} = \vec{x} - 2\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}$
$\vec{x}(3;1)$ $\vec{y}(-1;3)$ $\vec{z}(6;8)$	$\vec{p}(-(-1); -3);$ $\vec{p}(1; -3)$	$\vec{d}(2 \cdot 3 - 1; 2 \cdot 1 + 3);$ $\vec{d}(5; 5)$	$\vec{v}(3 - 2 \cdot (-1) + 0,5 \cdot 6; 1 - 2 \cdot 3 + 0,5 \cdot 8);$ $\vec{v}(8; -1)$
$\vec{x}(6; -5)$ $\vec{y}(2; -3)$ $\vec{z}(-4; 2)$	$\vec{p}(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$	$\vec{d}(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$	$\vec{v}(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$
$\vec{x}(-1; 1)$ $\vec{y}(1; 0)$ $\vec{z}(-2; -2)$	$\vec{p}(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$	$\vec{d}(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$	$\vec{v}(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$
$\vec{x}(0; 0)$ $\vec{y}(3; 3)$ $\vec{z}(-1; 4)$	$\vec{p}(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$	$\vec{d}(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$	$\vec{v}(\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}})$

Задание 24

Векторы заданы координатами в некотором базисе. Заполните свободные ячейки таблицы.

Среди данных векторов укажи	коллинеранные векторы	сонаправленные векторы	противоположно направленные векторы
$\vec{x}(6;-3); \vec{y}(1;2); \vec{z}(2;4);$ $\vec{u}(2;-1); \vec{v}(-1;-2); \vec{w}(-4;8)$	$\vec{x}$ и $\vec{u}$; $\vec{y}, \vec{z}$ и $\vec{u}$	$\vec{x}$ и $\vec{u}$; $\vec{y}$ и $\vec{z}$	$\vec{y}$ и $\vec{v}$; $\vec{z}$ и $\vec{v}$
$\vec{x}(1;3); \vec{y}(5;7); \vec{z}(2;-6);$ $\vec{u}(2;-1); \vec{v}(2;6); \vec{w}(-1;-3)$			
$\vec{x}(-3;9); \vec{y}(3;6); \vec{z}(4;6);$ $\vec{u}(2;6); \vec{v}(2;3); \vec{w}(-2;-4)$			
$\vec{x}(6;-3); \vec{y}(-1;2); \vec{z}(-4;2);$ $\vec{u}(2;-1); \vec{v}(-1;-2); \vec{w}(-4;-8)$			
$\vec{x}(-3;-3); \vec{y}(3;0); \vec{z}(0;4);$ $\vec{u}(1;-1); \vec{v}(0;-2); \vec{w}(-1;0)$			

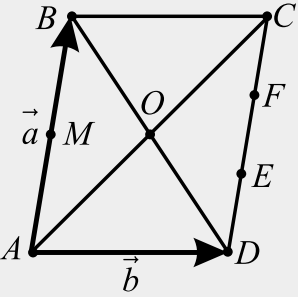
Задание 25

Найдите k из условия.

$\vec{x}(k;9); \vec{y}(3;1);$ $\vec{x} \parallel \vec{y}$	$\vec{x} \parallel \vec{y}$. Значит, координаты этих векторов пропорциональны: $k \cdot 1 = 9 \cdot 3$ Отсюда получаем $k = 27$. Ответ: 27.
$\vec{x}(5;k); \vec{y}(-2;4);$ $\vec{x} \parallel \vec{y}$	Ответ: _____
$\vec{x}(k;6); \vec{y}(8;-4);$ $\vec{x} \parallel \vec{y}$	Ответ: _____
$\vec{x}(4;k); \vec{y}(k;9);$ $\vec{x} \parallel \vec{y}$	Ответ: _____
$\vec{x}(k-1;3); \vec{y}(2k;5);$ $\vec{x} \parallel \vec{y}$	Ответ: _____
$\vec{x}(4;k); \vec{y}(k;9);$ $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}$	Ответ: _____
$\vec{x}(k-1;2); \vec{y}(3;k);$ $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$	Ответ: _____
$\vec{x}(2k-7;1); \vec{y}(-5;k);$ $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}$	Ответ: _____

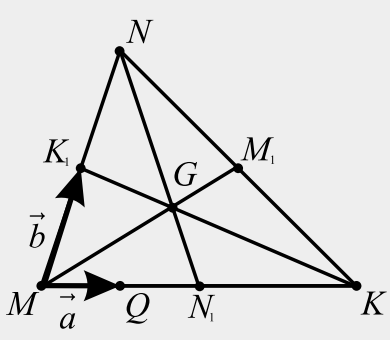
Задание 26

Разложите векторы на составляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$ABCD$ – параллелограмм, M – середина AB, $DE = EF = FC$ 	$\vec{AO}$ $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD};$ $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b};$ $\vec{AO} = \frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}.$ Ответ: $\vec{AO} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$
1) $\vec{BD}$ Ответ: _____	2) $\vec{MO}$ Ответ: _____
3) $\vec{DM}$ Ответ: _____	4) $\vec{CM}$ Ответ: _____
5) $\vec{DO}$ Ответ: _____	6) $\vec{AE}$ Ответ: _____
7) $\vec{EB}$ Ответ: _____	8) $\vec{OF}$ Ответ: _____
9) $\vec{FM}$ Ответ: _____	10) $\vec{ME}$ Ответ: _____

Задание 27

Разложите векторы на составляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

В $\triangle MNK$ проведены медианы, Q – середина MN_1 	$\overrightarrow{MG}$ $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} =$$= \frac{1}{3} \cdot 2\vec{b} + \frac{2}{3} \cdot 2\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{a}.$ Ответ: $\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{a}.$
1) $\overrightarrow{KK_1}$ Ответ: _____	2) $\overrightarrow{KN}$ Ответ: _____
3) $\overrightarrow{N_1N}$ Ответ: _____	4) $\overrightarrow{M_1N_1}$ Ответ: _____
5) $\overrightarrow{GK}$ Ответ: _____	6) $\overrightarrow{M_1M}$ Ответ: _____
7) $\overrightarrow{N_1G}$ Ответ: _____	8) $\overrightarrow{NQ}$ Ответ: _____
9) $\overrightarrow{QG}$ Ответ: _____	10) $\overrightarrow{QM_1}$ Ответ: _____

Задание 28

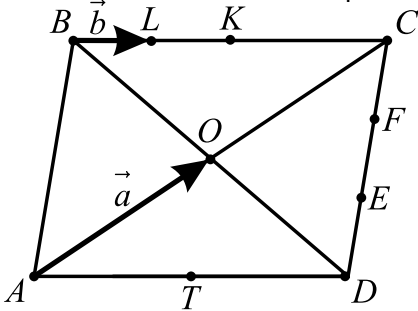
Даны координаты векторов $\vec{x}$; $\vec{y}$; $\vec{z}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b})$. Выполните задания.

Пример. Найдите координаты $\vec{a}$ в базисе $(\vec{x}; \vec{b})$.
Если $\vec{x}(2;3)$, то $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, откуда $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{3}{2}\vec{b}$, то есть $\vec{a}(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$ в базисе $(\vec{x}; \vec{b})$.

Найдите координаты	1) $\vec{x}(1;1)$; $\vec{y}(1;-1)$; $\vec{z}(2;0)$	2) $\vec{x}(3;5)$; $\vec{y}(0;-2)$; $\vec{z}(1;2)$	3) $\vec{x}(3;5)$; $\vec{y}(1;-2)$; $\vec{z}(2;0)$
$\vec{x}$ в базисе $(\vec{b}; \vec{a})$			
$2\vec{y} + \vec{z}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b})$			
$\vec{a}$ в базисе $(\vec{x}; \vec{y})$			
$\vec{b}$ в базисе $(\vec{x}; \vec{y})$			
$\vec{z}$ в базисе $(\vec{x}; \vec{y})$			

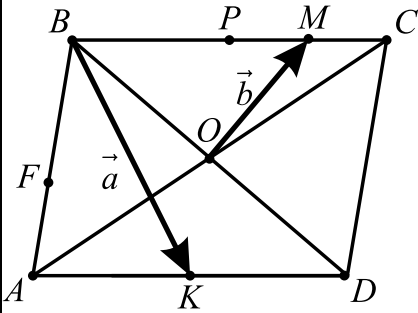
Задание 29

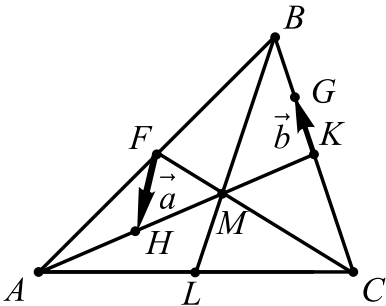
Разложите векторы на составляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$ABCD$ – параллелограмм, T – середина AD, $DE = EF = FC$; $BL = LK = \frac{1}{4}BC$ 	1) $\overrightarrow{FD}$ Ответ: _____	2) $\overrightarrow{OL}$ Ответ: _____
3) $\overrightarrow{KE}$ Ответ: _____	4) $\overrightarrow{BT}$ Ответ: _____	5) $\overrightarrow{FO}$ Ответ: _____

Задание 30

Найдите координаты указанных векторов в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$.

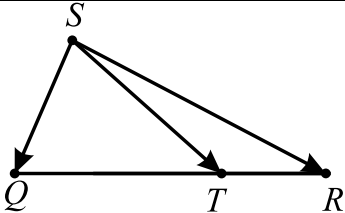
$ABCD$ – параллелограмм, K – середина AD, $CM : MP : PB = 1 : 1 : 2$, $AF : FB = 2 : 3$ 	1) $\overrightarrow{AB}$ Ответ: _____	2) $\overrightarrow{PM}$ Ответ: _____
--	--	--

3) $\overrightarrow{OA}$	4) $\overrightarrow{KF}$	5) $\overrightarrow{FD}$
Ответ: _____	Ответ: _____	Ответ: _____
В $\triangle ABC$ проведены медианы, H – середина AM, G – середина BK 	6) $\overrightarrow{BA}$	7) $\overrightarrow{CM}$
Ответ: _____	Ответ: _____	Ответ: _____

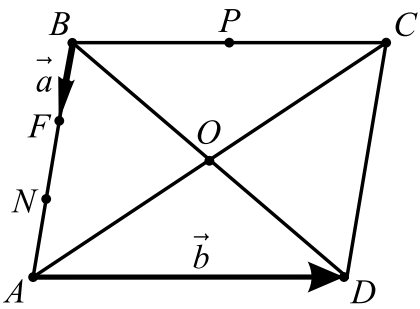
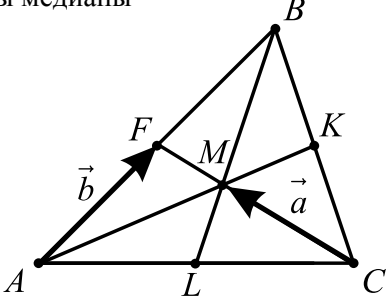
Задание 31

Проверьте себя.

А) Выполните задания.

1) Известно, что $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AP}$, $MP = 15$. Найдите $ \overrightarrow{AP} $	Ответ: _____
2) Точка F середина отрезка MN . Найдите координаты $\overrightarrow{OF}$ в базисе $(\overrightarrow{NO}; \overrightarrow{OM})$	Ответ: _____
3) Точка F на отрезке MN такова, что $MF = 7$, $NF = 5$. Выразите $\overrightarrow{OF}$ через $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$	Ответ: _____
4) Известно, что $QT : TR = 8 : 5$ и $\overrightarrow{SR} = x\overrightarrow{SQ} + y\overrightarrow{ST}$. Найдите x и y 	Ответ: _____
5) При каких значениях k векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если в некотором базисе они имеют координаты: $\vec{a}(k; -2)$; $\vec{b}(3; k - 5)$?	Ответ: _____

Б) Найдите координаты указанных векторов в базисе $(\vec{a}; \vec{b})$.

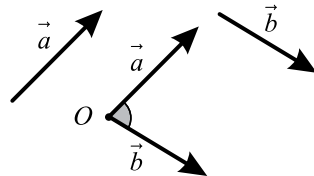
1) $ABCD$ – параллелограмм, P – середина BC, $AN = NF = FB$ 	Ответ: $\vec{OC}$ _____; $\vec{PN}$ _____
2) В $\triangle ABC$ проведены медианы 	Ответ: $\vec{LC}$ _____; $\vec{BK}$ _____

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



Важно знать:

- Для двух ненулевых векторов угол между ними можно найти следующим образом: отложить данные векторы от одной точки, и найти угол между лучами, образованными этими векторами (угол между любым вектором и нулевым не определён). Векторы перпендикулярны, если угол между ними равен 90° . Угол между ненулевыми сонаправленными векторами равен 0° , угол между противоположно направленными векторами равен 180° .
- Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из двух векторов – нулевой, их скалярное произведение считается равным нулю.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}); \quad \vec{0} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

- Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;
- $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

- Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

- Косинус угла между ненулевыми векторами можно вычислить по формуле $\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Задание 32

Дан равносторонний треугольник со стороной 6, отмечены середины сторон.

Найдите неизвестные величины.

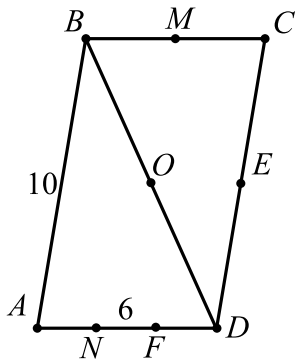
		1) $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right) =$	2) $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA}\right) =$	3) $\left(\overrightarrow{AA_1}; \overrightarrow{CB}\right) =$
		4) $\left(\overrightarrow{C_1C}; \overrightarrow{CA}\right) =$	5) $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{B_1B}\right) =$	6) $\left(\overrightarrow{AA_1}; \overrightarrow{BB_1}\right) =$
7) $\left(\overrightarrow{OC_1}; \overrightarrow{AA_1}\right) =$	8) $\left(\overrightarrow{B_1O}; \overrightarrow{CB}\right) =$	9) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} =$	10) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BO} =$	11) $\overrightarrow{AA_1}^2 =$
12) $\overrightarrow{C_1C} \cdot \overrightarrow{CA} =$	13) $\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{AB} =$	14) $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{B_1B} =$	15) $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{A_1C} =$	16) $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OA} =$

Задание 33
Заполните таблицу.

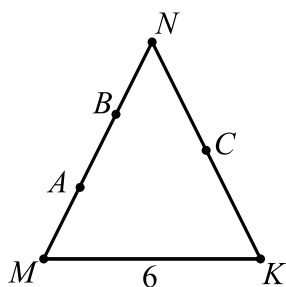
	$ \vec{a} $	$ \vec{b} $	$\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} =$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$2\vec{a} \cdot (-\vec{b})$
1	5	4	30°		
2	6	2	45°		
3	4	7	120°		
4	12	5	90°		
5	5		135°		
6	4			18	
7		6		− 30	
8		11		0	
9	7		0°		
10	5	5	180°		
11		3	60°		
12	6	7		− 42	
13	13	12		− 78	
14	3	8			− 24
15	15		120°	90	
16	8		180°		32

Задание 34

Вычислите скалярные произведения, используя разложение вектора на составляющие векторы и свойства скалярного произведения.

Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами 6 и 10, $\angle BAD = 60^\circ$, M – середина BC, E – середина CD, O – середина BD, $AN = NF = FD$ 	1) Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
	Ответ: _____
	2) Найдите $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$
	Ответ: _____
Пример: Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ Решение: Выразим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} = \frac{1}{10} \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AD}$ (их длины равны 1): $\overrightarrow{AB} = 10\vec{a}$; $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) =$ $= \frac{1}{2}(10\vec{a} + 6\vec{b}) = 5\vec{a} + 3\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 10\vec{a} \cdot (5\vec{a} + 3\vec{b}) =$ $= 50\vec{a}^2 + 30\vec{a} \cdot \vec{b} =$ $= 50 \cdot 1 + 30 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ =$ $= 50 + 30 \cdot \frac{1}{2} = 65$ Ответ: 65	3) Найдите $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CD}$
	Ответ: _____
	4) Найдите $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{OC}$
	Ответ: _____
	5) Найдите $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{MD}$
	Ответ: _____
	6) Найдите $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DM}$
	Ответ: _____

Дан равносторонний треугольник MNK со стороной 6,
 C – середина NK , $MA = AB = BN$



7) Найдите $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AK}$

Ответ: _____

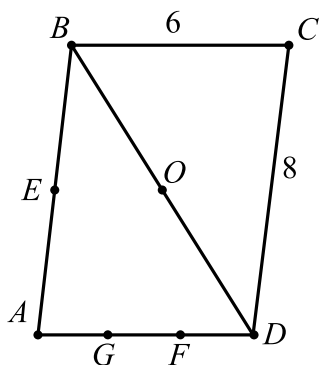
8) Найдите $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CB}$

Ответ: _____

9) Найдите $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KB}$

Ответ: _____

Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами 6 и 8, $\angle BAD = 60^\circ$,
 E – середина AB ,
 O – середина BD ,
 $AG = GF = FD$



10) Найдите $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EO}$

Ответ: _____

11) Найдите $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BG}$

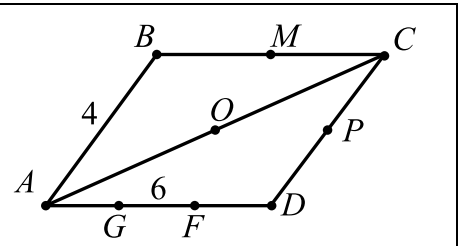
Ответ: _____

12) Найдите $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GC}$

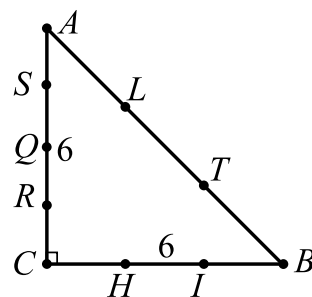
Ответ: _____

Задание 35

Найдите длину указанных отрезков, используя векторы.

Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами 6 и 4, $\angle BAD = 60^\circ$, M – середина BC, O – середина AC, P – середина CD, $AG = GF = FD$	
Пример. Найдите OG. Решение: Воспользуемся тем, что $OG = \overrightarrow{OG} = \sqrt{ \overrightarrow{OG} ^2} = \sqrt{\overrightarrow{OG}^2}$. Введем единичный базис $(\vec{a}; \vec{b})$, где $\vec{a} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. Тогда $\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{GO} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AO}) = -\left(-2\vec{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\right) = 2\vec{b} - \frac{1}{2}(4\vec{a} + 6\vec{b}) = 2\vec{b} - 2\vec{a} - 3\vec{b} = -2\vec{a} - \vec{b}$ Получаем $OG = \sqrt{\overrightarrow{OG}^2} = \sqrt{(-2\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot \cos 60^\circ + 1} = \sqrt{7}$. Ответ: $OG = \sqrt{7}$	
1) Найдите CG	
2) Найдите PG	
3) Найдите GM	
4) Найдите FM	

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , катеты которого равны 6. На сторонах этого треугольника, отмечены точки, делящие стороны на равные отрезки (как показано на рисунке)



5) Найдите RL

6) Найдите RT

7) Найдите IL

8) Найдите TQ

9) Найдите SI

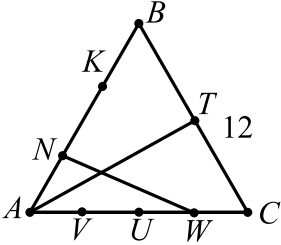
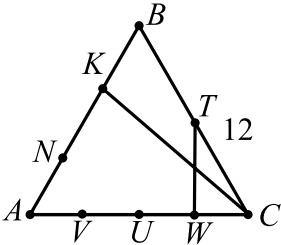
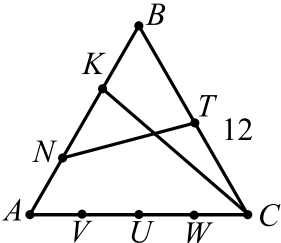
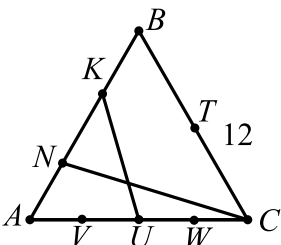
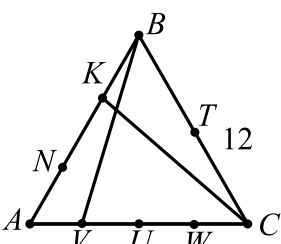
Задание 36

Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами 4 и 6 и острым углом в 60° , точки на его сторонах делят эти стороны на равные отрезки. Рассмотрим единичный базис $(\vec{a}; \vec{b})$, где $\vec{a} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. Найдите косинус угла между указанными на чертеже прямыми, заполнив пустые ячейки таблицы.

	MD и PG	1) MF и BD	2) BF и AP
Разложение векторов, задающих прямые, по базису	$\overrightarrow{GP} = 4\vec{b} + 2\vec{a}$ $\overrightarrow{DM} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$		
Длины этих векторов	$ \overrightarrow{GP} = \sqrt{(4\vec{b} + 2\vec{a})^2} = \sqrt{16 + 8 + 4} = 2\sqrt{7}$ $ \overrightarrow{DM} = \sqrt{(4\vec{a} + 3\vec{b})^2} = \sqrt{16 + 12 + 9} = \sqrt{37}$		
Скалярное произведение этих векторов	$\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{DM} = (4\vec{b} + 2\vec{a})(4\vec{a} + 3\vec{b}) = 8 + 12 + 8 + 3 = 31$		
Косинус угла между прямыми	$\cos(\widehat{GP, DM}) = \left \cos(\widehat{\overrightarrow{GP}, \overrightarrow{DM}}) \right = \frac{ \overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{DM} }{ \overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{DM} } = \frac{31}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{37}} = \frac{31}{2\sqrt{259}}$		
Ответ	$\frac{31}{2\sqrt{259}}$		

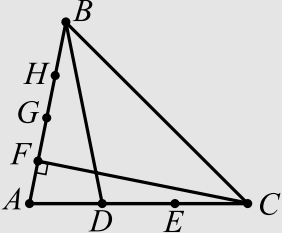
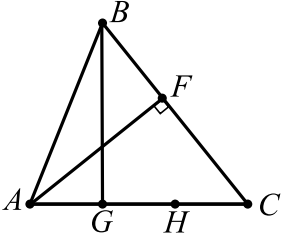
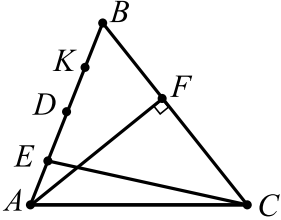
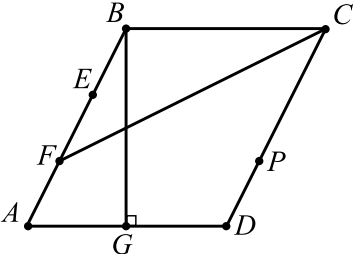
Задание 37

Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 12, точки на сторонах угла делят эти стороны на равные части. Найдите косинус угла между указанными на чертеже прямыми.

1) 	AT и NW Ответ: _____
2) 	KC и TW Ответ: _____
3) 	NT и KC Ответ: _____
4) 	KU и CN Ответ: _____
5) 	CK и BV Ответ: _____

Задание 38

Дан треугольник ABC , точки на сторонах угла делят эти стороны на равные части.
Выполните задания.

$AB = 4; AC = 3$ Найти $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{FC}$ 	Введём единичный базис: $\vec{a} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Тогда $\overrightarrow{BD} = -4\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{FC} = -\vec{a} + 3\vec{b}$. Но $\overrightarrow{FC} \cdot \vec{a} = 0$, то есть $(-\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$. Отсюда получаем $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a}^2 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$. Тогда $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{FC} = (-4\vec{a} + \vec{b})(-\vec{a} + 3\vec{b}) = 4\vec{a}^2 - 13\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b}^2 =$ $= 4 - \frac{13}{3} + 3 = 7 - \frac{13}{3} = \frac{8}{3}$. Ответ: $\frac{8}{3}$
1) $AB = 5; AC = 6$ Найдите $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{AF}$ 	Ответ: _____
2) $AB = 4; AC = 7$ Найдите $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 	Ответ: _____
3) $AB = 4; AC = 7$ Найдите $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{GB}$ 	Ответ: _____

Задание 39
 Проверьте себя.
 Выполните задания.

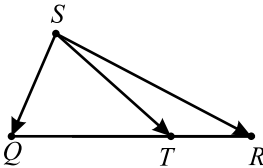
А) Известно, что $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$. Сколько целых значений может принимать $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

Ответ: _____

Б) Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 120^\circ$.

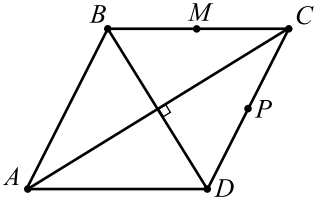
1) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$	
2) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b} =$	
3) $ \vec{a} - 2\vec{b} =$	

В) Известно, что $QT : TR = 7 : 5$, угол QSR – прямой.
 $SQ = 6$; $SR = 8$.



1) $\overrightarrow{QS} \cdot \overrightarrow{SR} =$	
2) $\overrightarrow{QS} \cdot \overrightarrow{QT} =$	
3) $\overrightarrow{QS} \cdot \overrightarrow{ST} =$	
4) $ \overrightarrow{ST} =$	
5) $\cos(\widehat{\overrightarrow{SR}; \overrightarrow{ST}}) =$	

Г) Дан ромб $ABCD$, $BD = 12$; $AC = 16$, точки M и P – середины сторон.



1) $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AC} =$	
2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} =$	
3) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DM} =$	
4) $ \overrightarrow{DM} =$	
5) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{MD}}) =$	

МЕТОД КООРДИНАТ

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ И ВЕКТОРА

Рассмотрим прямоугольную систему координат, основанную на базисе $(\vec{i}; \vec{j})$.



Важно знать:

- Вектор $\overrightarrow{OM}$ начало координат которого совпадает с началом координат O , называется радиус-вектором точки M . Координаты радиус-вектора точки M равны координатам точки M .
- Координаты произвольного вектора равны разности координат его конца и начала.
- Если $A(x_a; y_a); B(x_b; y_b)$, то $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$.
- Если точка C лежит на отрезке AB , причём $AC : CB = m : n$, и $A(x_a; y_a); B(x_b; y_b)$, координаты точки C можно вычислить по формуле:

$$x_c = \frac{n}{n+m}x_a + \frac{m}{n+m}x_b; y_c = \frac{n}{n+m}y_a + \frac{m}{n+m}y_b.$$

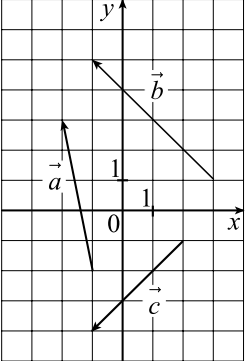
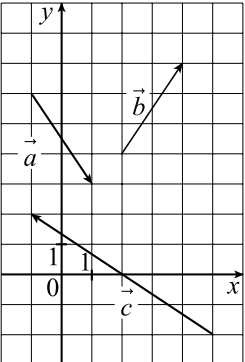
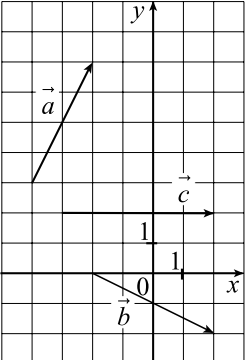
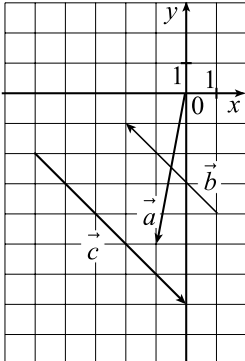
В частности, если C – середина отрезка AB , то $x_c = \frac{x_a + x_b}{2}; y_c = \frac{y_a + y_b}{2}$.

- Если $\vec{a}(x_a; y_a); \vec{b}(x_b; y_b)$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$. В частности, ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_a x_b + y_a y_b = 0$.
- Пусть $M(x_m; y_m)$ – точка пересечения медиан треугольника ABC , $A(x_a; y_a), B(x_b; y_b), C(x_c; y_c)$, тогда $x_m = \frac{1}{3}(x_a + x_b + x_c), y_m = \frac{1}{3}(y_a + y_b + y_c)$.

Задание 40

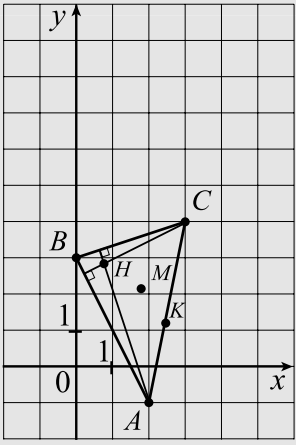
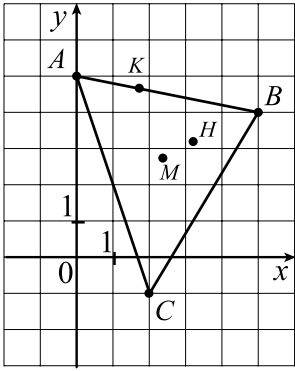
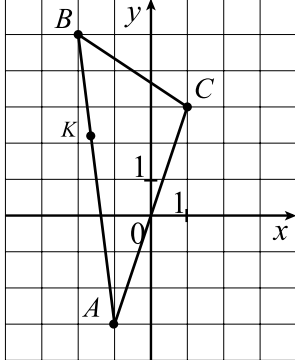
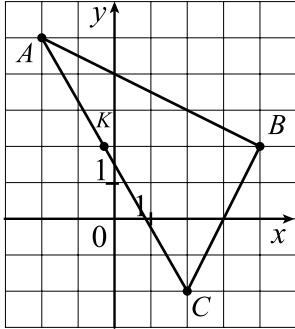
По данным рисунка заполните таблицу.

1)		$ \vec{a} =$	$ \vec{b} =$
		$ \vec{c} =$	$\vec{a} \cdot \vec{b} =$
		$\cos(\widehat{a; b}) =$	$x_c =$ $y_c =$
		$\vec{b} \cdot \vec{c} =$	$\cos(\widehat{b; c}) =$
2)		$ \vec{a} =$	$ \vec{b} =$
		$ \vec{c} =$	$\vec{a} \cdot \vec{b} =$
		$\cos(\widehat{a; b}) =$	$x_c =$ $y_c =$
		$\vec{b} \cdot \vec{c} =$	$\cos(\widehat{b; c}) =$

3)		$ \vec{a} =$	$ \vec{b} =$
		$ \vec{c} =$	$\vec{a} \cdot \vec{b} =$
		$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) =$	$x_b =$ $y_b =$
		$\vec{b} \cdot \vec{c} =$	$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}) =$
4)		$ \vec{a} =$	$ \vec{b} =$
		$ \vec{c} =$	$\vec{a} \cdot \vec{b} =$
		$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) =$	$x_c =$ $y_c =$
		$\vec{b} \cdot \vec{c} =$	$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}) =$
5)		$ \vec{a} =$	$ \vec{b} =$
		$ \vec{c} =$	$\vec{a} \cdot \vec{b} =$
		$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) =$	$x_a =$ $y_a =$
		$\vec{b} \cdot \vec{c} =$	$\cos(\widehat{\vec{b}; \vec{c}}) =$
6)		$ \vec{a} =$	$ \vec{b} =$
		$ \vec{c} =$	$\vec{a} \cdot \vec{b} =$
		$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) =$	$x_a =$ $y_a =$
		$\vec{b} \cdot \vec{c} =$	$(\widehat{\vec{b}; \vec{c}}) =$

Задание 41

Найдите координаты точек (M – точка пересечения медиан, H – точка пересечения высот, K – делит сторону в отношении 2:3).

1) 	M $x_M = \frac{1}{3}(2+0+3) = \frac{5}{3};$ $y_M = \frac{1}{3}(-1+3+4) = 2$	K $x_K = \frac{2}{5} \cdot 3 + \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{12}{5};$ $y_K = \frac{2}{5} \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot (-1) = \frac{5}{5} = 1$
	H Пусть $H(x; y)$. Имеем $\overrightarrow{BC}(3;1)$, $\overrightarrow{AH}(x-2; y+1)$, $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH}$. Получаем $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$; $3(x-2) + 1 \cdot (y+1) = 0$; $3x + y = 5$. Так же $\overrightarrow{AB}(-2;4)$, $\overrightarrow{CH}(x-3; y-4)$, $-2(x-3) + 4(y-4) = 0$; $-2x + 4y = 10$. Получаем систему: $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$, откуда $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{20}{7}$. Ответ: $H\left(\frac{5}{7}; \frac{20}{7}\right)$	
2) 	M	K
	Ответ: _____	
3) 	M	K
	Ответ: _____	
4) 	M	K
	Ответ: _____	
H		Ответ: _____

В треугольнике ABC найдите:

б) расстояние от точки пересечения медиан до вершины C .

[illegible]

Задание 43

Проверьте себя.

А) Вычислите длины сторон треугольника ABC и определите его вид (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный).

1) $A(4;2)$ $B(-2;-1)$ $C(2;6)$	2) $A(2;1)$ $B(8;1)$ $C(5;10)$	3) $A(5;-1)$ $B(-3;-2)$ $C(7;3)$
$AB =$	$AB =$	$AB =$
$AC =$	$AC =$	$AC =$
$BC =$	$BC =$	$BC =$
_____	_____	_____

Б) Выполните задания.

1) $A(4;5)$, $K(-1;3)$. Найдите координаты точки T , если известно, что A – середина отрезка TK	
2) На отрезке AB взята точка F так, что $AF : FB = 3 : 7$. Найдите координаты точки F , если $A(-3;4)$, $B(13;6)$	
3) На прямой $y = 0,5x + 1$ найдите точку, равноудалённую от точек $(5;2)$ и $(-1;-1)$	
4) В параллелограмме $ABCD$ известны $A(5;2)$, $B(-8;3)$, $C(13;-6)$. Найдите координаты точки D	
5) Даны точки $A(-3;-9)$, $B(2;3)$, $C(-7;-6)$. Вычислите косинус угла CAB , используя скалярное произведение векторов	

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ



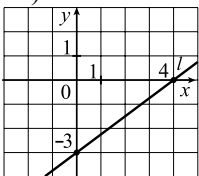
Важно знать:

- Уравнение прямой по точке $M(x_0; y_0)$ и нормали $\vec{n}(A, B)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.
- Общее уравнение прямой $Ax + By + c = 0$, где $(A; B)$ – координаты нормали.
- Каноническое уравнение прямой: если прямая не параллельна осям координат, то она задаётся уравнением $\frac{x - x_0}{t_x} = \frac{y - y_0}{t_y}$, где $\vec{t}(t_x, t_y)$ – направляющий вектор прямой, а $M(x_0; y_0)$ – точка на этой прямой; если прямая параллельна какой-либо оси координат, то она задаётся соответственно уравнениями $x = x_0$ или $y = y_0$.
- Уравнение прямой (не параллельной ни одной из осей координат) по двум точкам $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.
- Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b (не равные нулю) – соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осью абсцисс и осью ординат.
- Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$ или $y = k(x - x_0) + y_0$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент прямой (тангенс угла наклона прямой к оси Ox), b – ордината точки пересечения прямой с осью ординат, $(x_0; y_0)$ – координаты точки на прямой.

Задание 44

Составьте уравнение прямой l по данным величинам (α – угол наклона прямой).

Дано	Уравнение прямой (любая форма)	Общее уравнение прямой (коэффициент при x – целое неотрицательное число)
$M(3; -4)$, $\vec{p}(1; 4)$, $l \parallel \vec{p}$, $M \in l$	Воспользуемся каноническим уравнением прямой l (по точке и направляющему вектору): $\frac{x - 3}{1} = \frac{y - 4}{-4}$	Преобразуем полученное уравнение прямой: $\frac{x - 3}{1} = \frac{y - 4}{-4}$ $-4(x - 3) = y - 4$; $-4x - y + 16 = 0$. Получаем l : $4x + y - 16 = 0$
1) $M(3; 2)$, $\vec{p}(5; 1)$, $l \parallel \vec{p}$, $M \in l$		
2) $M(3; -1)$, $\vec{p}(5; 0)$, $l \parallel \vec{p}$, $M \in l$		
3) $M(2; -5)$, $\vec{p}(2; 3)$, $l \parallel \vec{p}$, $M \in l$		

4) $A(-2;-7)$, $B(4;3)$, l – серединный перпендикуляр к отрезку AB		
5) $A(3;-5)$, $B(4;3)$, l – прямая AB		
6) $M(3;-1)$, $\vec{p}(5;0)$, $l \parallel \vec{p}$, $M \in l$		
7) $M(2;-5)$, $\alpha = 30^\circ$, $M \in l$		
8) $A(3;-5)$, $B(3;2)$, l – прямая AB		
9) $M(-2;5)$, $\vec{p}(1;6)$, $l \perp \vec{p}$, $M \in l$		
10) $M(-2;5)$, $M \in l$, $l \parallel m$, $m: 4x - 3y = 0$		
11) $M(-2;5)$, $M \in l$, $l \perp m$, $m: 4x - 3y + 1 = 0$		
12) $A(-3;0)$, $B(0;7)$, l – прямая AB		
13) $M(-2;5)$, $\alpha = 135^\circ$, $M \in l$		
14) 		



Важно знать:

Если две **различные** прямые l_1 и l_2 имеют нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, направляющие векторы $\vec{t}_1$ и $\vec{t}_2$, углы наклона α_1 и α_2 и угловые коэффициенты k_1 и k_2 соответственно, то:

- Условие $l_1 \parallel l_2$:
 - ✓ $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ (то есть координаты нормалей пропорциональны);
 - ✓ $\vec{t}_1 \parallel \vec{t}_2$ (то есть координаты направляющих векторов пропорциональны);
 - ✓ $\alpha_1 = \alpha_2$ (то есть $k_1 = k_2$).
- Условие $l_1 \perp l_2$:
 - ✓ $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ (то есть $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$);
 - ✓ $\vec{t}_1 \perp \vec{t}_2$ (то есть $\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = 0$);
 - ✓ $|\alpha_1 - \alpha_2| = 90^\circ$ (то есть $k_1 \cdot k_2 = -1$).
- Угол между l_1 и l_2 (обозначается $-\widehat{(l_1; l_2)}$):
 - ✓ $\cos(\widehat{l_1; l_2}) = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_1; \vec{n}_2}) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$;
 - ✓ $\cos(\widehat{l_1; l_2}) = \left| \cos(\widehat{\vec{t}_1; \vec{t}_2}) \right| = \frac{|\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2|}{|\vec{t}_1| \cdot |\vec{t}_2|}$;
 - ✓ $\operatorname{tg}(\widehat{l_1; l_2}) = |\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} \right| = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$ (если l_1 и l_2 не перпендикулярны).

Задание 45

Среди данных прямых укажите параллельные и перпендикулярные.

	параллельные	перпендикулярные
1) $l_1: 3x + 2y - 7 = 0$; $l_2: 4x + 6y - 8 = 0$; $l_3: 4x - 6y + 1 = 0$; $l_4: 2x + 3y = 0$		
2) $l_1: 8x + 12y + 5 = 0$; $l_2: 4x - 3y + 3 = 0$; $l_3: 3x + 4y - 1 = 0$; $l_4: 2x + 3y - 18 = 0$		
3) $l_1: 6x + 4y - 17 = 0$; $l_2: 6x + 9y + 2 = 0$; $l_3: 3x - 2y + 1 = 0$; $l_4: 2x + 3y - 1 = 0$		
4) $l_1: -0,6x + 3 = 0$; $l_2: 9x - 12y - 1 = 0$; $l_3: 15x - 20y + 11 = 0$; $l_4: y = -\frac{5}{3}x + 5$		
5) $l_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{4}$; $l_2: 6x + 8y - 5 = 0$; $l_3: 4x - 3y + 11 = 0$; $l_4: y = \frac{3}{4}x + 7$		

Задание 46

Найдите угол между прямыми l_1 и l_2 (любую его тригонометрическую функцию).

$l_1: 3x - 4y + 7 = 0$ $l_2: y = 2x - 5$	Запишем уравнение прямой l_2 в общем виде: $2x - y - 5 = 0$. Тогда $\vec{n}_1(3; -4)$, $\vec{n}_2(2; -1)$; $\vec{n}_1 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$; $\vec{n}_2 = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$; $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) = 10$. Тогда имеем: $\cos(\widehat{l_1; l_2}) = \left \cos(\widehat{n_1; n_2}) \right = \left \frac{10}{5\sqrt{5}} \right = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ Ответ: $\cos(\widehat{l_1; l_2}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
$l_1: y = -3x - 11$ $l_2: y = 2x + 7$	Воспользуемся уравнениями прямых через угловой коэффициент: $k_1 = -3$; $k_2 = 2$ – угловые коэффициенты, α_1 и α_2 – углы наклона прямых. Тогда $\operatorname{tg}(\widehat{l_1; l_2}) = \left \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \right = \left \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right = \left \frac{-3 - 2}{1 + (-3) \cdot 2} \right = \left \frac{-5}{-5} \right = 1$ Значит, $(\widehat{l_1; l_2}) = 45^\circ$ Ответ: $(\widehat{l_1; l_2}) = 45^\circ$
1) $l_1: 4x + 3y + 7 = 0$ $l_2: 5x - 12y + 5 = 0$	
2) $l_1: y = 3x + 5$ $l_2: y = -2x + 17$	
3) $l_1: \frac{x - 11}{3} = \frac{y}{4}$ $l_2: 8x + 15y - 3 = 0$	
4) $l_1: y = 0,5x - 9$ $l_2: 3x + 2y + 1 = 0$	

5) $l_1: \frac{x-11}{-4} = \frac{y}{3}$ $l_2: y = 0,75x + 1$	
6) $l_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ $l_2: y = 2x - 3$	
7) $l_1: \frac{x-5}{12} = \frac{y+1}{8}$ $l_2: 3x + 2y - 3 = 0$	

Задание 47

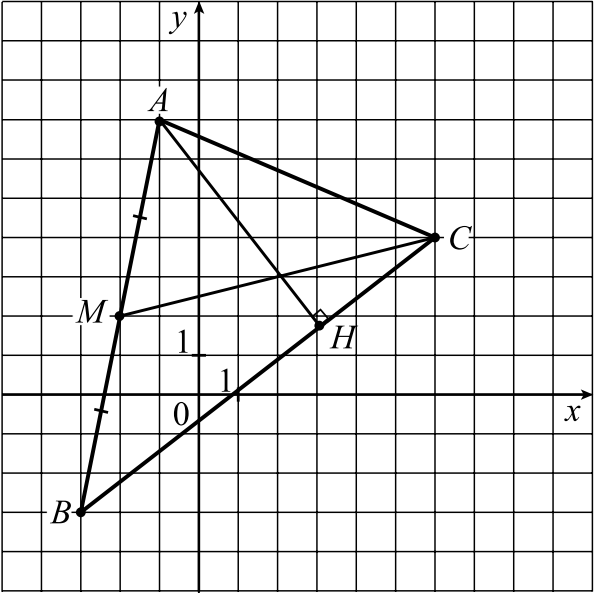
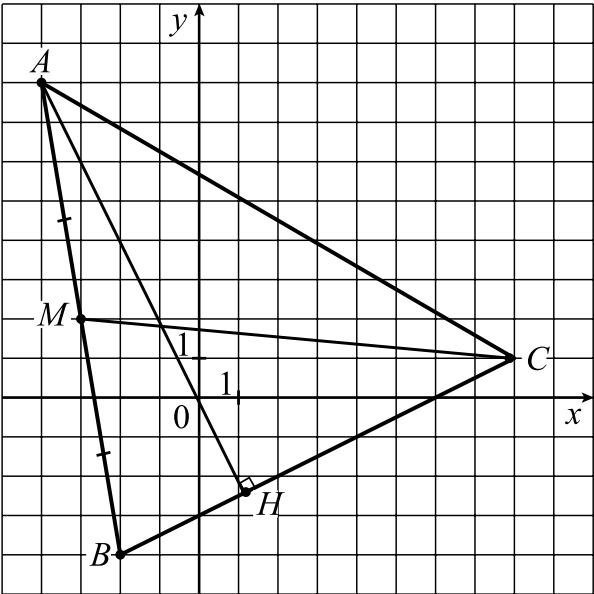
Используя уравнение прямой в отрезках, выполните задания.

Напишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -2)$ и отсекающей от четвёртого координатного угла треугольник площади 12	Пусть прямая l имеет уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. По условию $S = \frac{1}{2} ab = 12$; $ab = 24$. Но $a > 0$, $b < 0$, поэтому $ab = -24$. Точка $M \in l$, значит, $\frac{3}{a} - \frac{2}{b} = 1$; $3b - 2a = ab$. Получаем $\begin{cases} ab = -24, \\ 3b - 2a = -24; \end{cases}$ откуда $\begin{cases} a = 6, \\ b = -4. \end{cases}$ Таким образом, $l: \frac{x}{6} + \frac{y}{-4} = 1$; $2x - 3y + 12 = 0$. Ответ: $l: 2x - 3y + 12 = 0$
1) Найдите площадь треугольника, отсекаемого от координатного угла прямой $2x - 3y + 5 = 0$	Ответ: _____

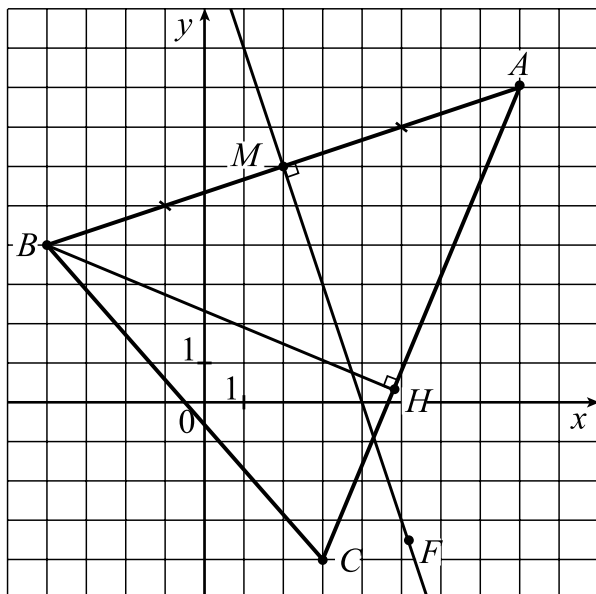
2) Напишите уравнение прямой в отрезках, проходящей через точку $N(-4; 10)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки	Ответ: _____
3) Напишите уравнение прямой в отрезках, параллельной прямой $m: 2x + 5y = 0$ и образующей с осями координат треугольник площади 5	Ответ: _____
4) Напишите уравнение прямой в отрезках, если она проходит через точку $K(2; -1)$, и её отрезок между осями координат делится точкой K пополам	Ответ: _____

Задание 48

По данным чертежа напишите в общем виде уравнения указанных прямых (коэффициент при x – целое неотрицательное число).

1)	 AC AH CM
2)	 AC AH CM

3)

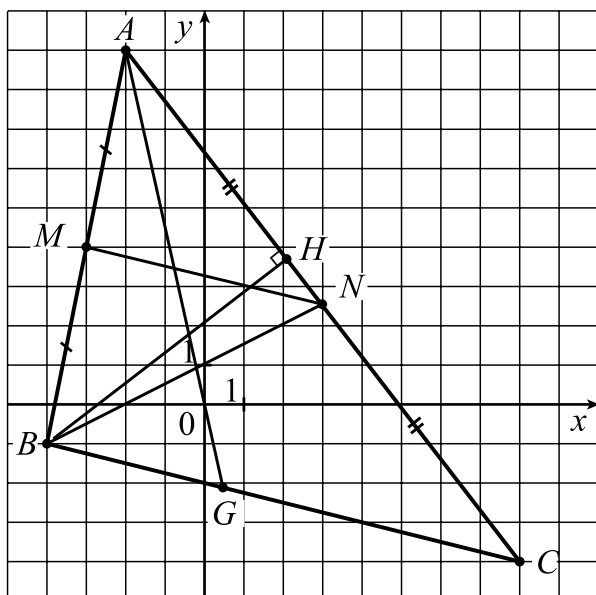


BC

BH

MF

4)



MN

BH

AG



Важно знать:

- Если прямая задаётся уравнением $ax + by + c = 0$, а точка M имеет координаты $(x_0; y_0)$, то расстояние от этой точки до прямой можно вычислить по формуле: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Задание 49

Найдите расстояние от точки M до прямой l .

1) $M(3; 1);$ $l: 4x - 3y + 7 = 0$	Ответ: _____
2) $M(-12; 5);$ $l: 5x + 12y - 13 = 0$	Ответ: _____
3) $M(0; 4);$ $l: 7x - 3y + 12 = 0$	Ответ: _____
4) $M(1; 1);$ $l: 8x + 15y - 6 = 0$	Ответ: _____
5) $M(2; -1);$ $l: y = 2x - 1$	Ответ: _____
6) $M(0; 0);$ $l: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$	Ответ: _____

Задание 50

Найдите площадь $\triangle ABC$, если даны координаты его вершин.

$A(3; -2);$ $B(1; 7);$ $C(-5; 0)$	Запишем уравнение прямой AB по двум точкам: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-7}{-2-7}$. Упрощая, получаем: высота CH $\triangle ABC$ равна расстоянию от точки C до прямой AB. $CH = \frac{ 9 \cdot (-5) + 2 \cdot 0 - 23 }{\sqrt{81 + 4}} = \frac{68}{\sqrt{85}}.$ При этом, по формуле расстояния между точками: $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{85}$. Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{85} \cdot \frac{68}{\sqrt{85}} = 34$. Ответ: 34
1) $A(2; 5);$ $B(-1; 0);$ $C(3; 11)$	Ответ: _____

2) $A(4; -1);$ $B(13; 2);$ $C(-1; 0)$	Ответ: _____
3) $A(17; 4);$ $B(1; 3);$ $C(0; 0)$	Ответ: _____
4) $A(8; -5);$ $B(-7; 2);$ $C(3; -2)$	Ответ: _____

Задание 51

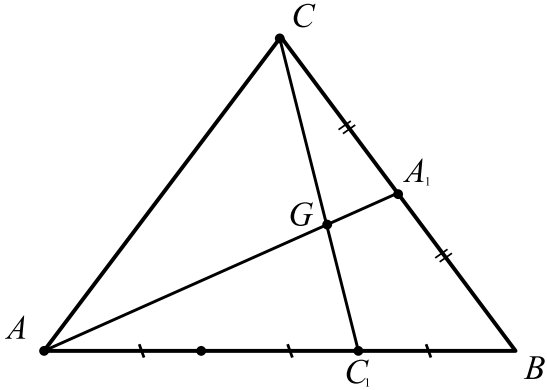
Используя формулу расстояния от точки до прямой, выполните задания.

1) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(1; 2)$, находящейся от точек $(2; 3)$ и $(4; -5)$ на равном расстоянии	
2) Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $4x + 3y + 1 = 0$ и отстоящей от неё на расстояние 3	
3) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + y + 10 = 0$ и $4x + 5y + 6 = 0$, и отстоящей от начала координат на расстояние 4	

4) На осях координат найдите точки (укажи их координаты), равноудалённые от прямых, заданных уравнениями $5x - y + 6 = 0$ и $5x + y - 3 = 0$	
5) Найдите координаты точек, отстоящих от каждой из прямых, заданных уравнениями $4x - 3y + 20 = 0$ и $3x + 4y - 60 = 0$, на расстояние 5	
6) Напишите уравнения прямых, содержащих биссектрисы углов, которые образованы прямыми, заданными уравнениями $3x - 4y + 5 = 0$ и $12x + 5y - 7 = 0$	

Задание 52

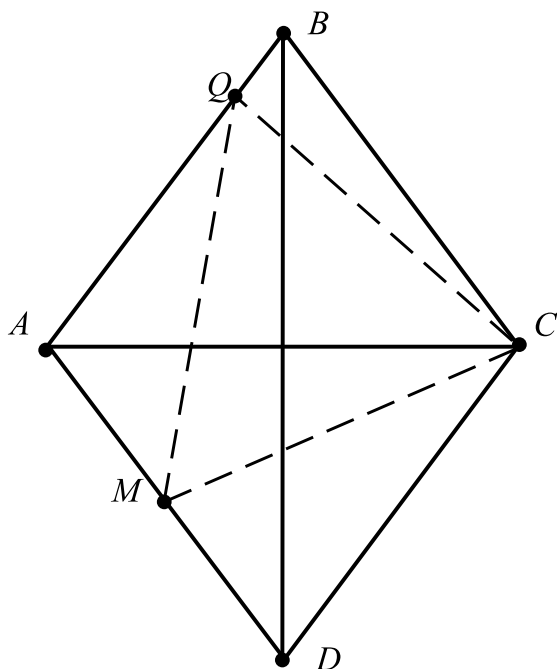
Решите задачи, используя метод координат.

1) В $\triangle ABC$ известно: $AB = 12$; $AC = BC = 10$ Найдите AG 	Ответ: _____
--	---------------------

2) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 7$, $AD = 6$.
 На стороне AD взята точка K так, что $KD = 2$.
 Через точку K под углом 45° к прямой KC
 проведена прямая, пересекающая луч AB в
 точке T . Найдите площадь $\triangle ACT$

Ответ: _____

3) $ABCD$ – ромб.
 $AC = 12$; $BD = 16$;
 M – середина AD ;
 $BQ = 2$.
 Найдите площадь $\triangle MQC$



Ответ: _____

Задание 53

Проверьте себя.

А) Вставьте пропущенные слова:

- 1) Прямые, заданные общими уравнениями с ненулевыми коэффициентами, _____, если все их коэффициенты пропорциональны.
- 2) Прямые _____, если координаты их направляющих векторов пропорциональны.
- 3) Прямые, произведение угловых коэффициентов которых равно -1 , _____.
- 4) Точки с координатами $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, если значения выражений $\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\frac{ax_2 + by_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ имеют _____ знаки.
- 5) Прямые, заданные уравнениями $y = 2,4x - 1$ и $5x + 12y + 3 = 0$, _____ между собой.
- 6) Уравнение $y = a(x - 5) + 1$ с параметром a описывает семейство прямых, которые _____ $(5; 1)$.

Б) Напишите общее уравнение прямой l , заполнив таблицу.

	$A \in l, l \parallel BC$	$A \in l, l \perp BC$
1) $A(3; 2);$ $B(-1; 4);$ $C(5; -2)$	Ответ: _____	Ответ: _____
2) $A(3; 5);$ $BC: 2x - 3y + 3 = 0$	Ответ: _____	Ответ: _____
3) $A(3; 5);$ $BC: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3}$	Ответ: _____	Ответ: _____

В) Даны координаты вершин треугольника $\triangle ABC: A(5; 9), B(2; -7), C(-5; 4)$. Выполните задания.

1) Найдите уравнение высоты AA_1	Ответ: _____
2) Найдите длину высоты AA_1	Ответ: _____
3) Найдите площадь $\triangle ABC$	Ответ: _____

УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ



Важно знать:

- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – каноническое уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ радиусом R ($R > 0$).
- Рассмотрим величину $\sigma = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2$ для точки $M(x; y)$. Если $\sigma > 0$, точка M лежит вне окружности, если $\sigma < 0$, точка M лежит внутри окружности, если $\sigma = 0$, точка M лежит на окружности.
- Прямая l является касательной к окружности тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу.

Задание 54

Укажите координаты центра и радиус окружности.

	Координаты центра	Радиус
1) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$		
2) $(x + 3)^2 + y^2 - 4y = 12$		
3) $x^2 + y^2 = 12$		
4) $x^2 + y^2 - 6x = 0$		
5) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$		
6) $x^2 + y^2 - 10x + 24y = 56$		
7) $x^2 + y^2 = 15 - 6x + 10y$		
8) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y = 0$		

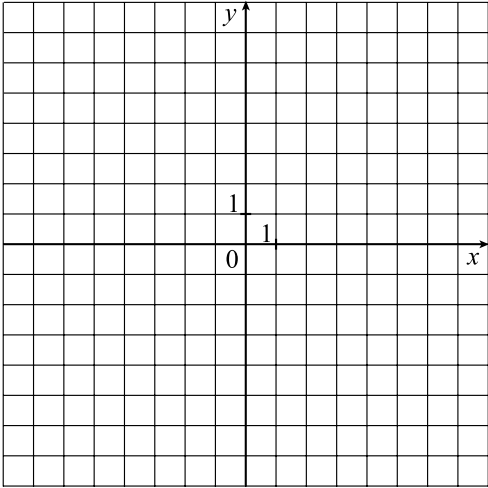
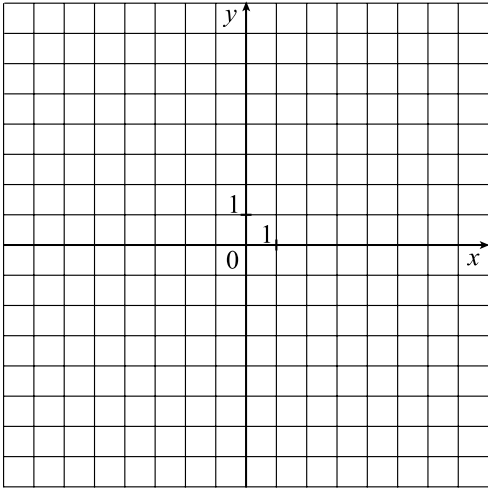
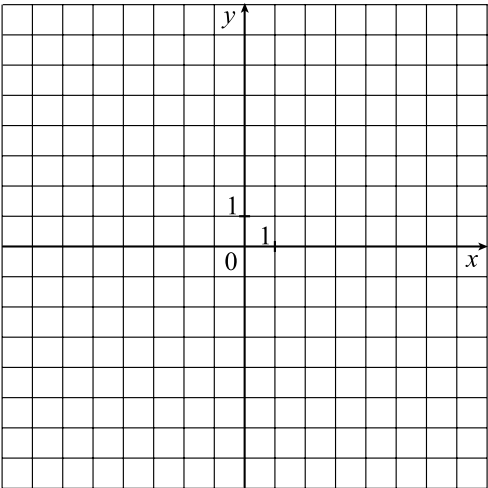
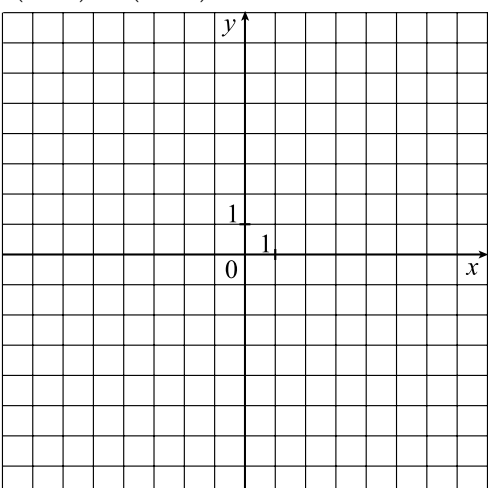
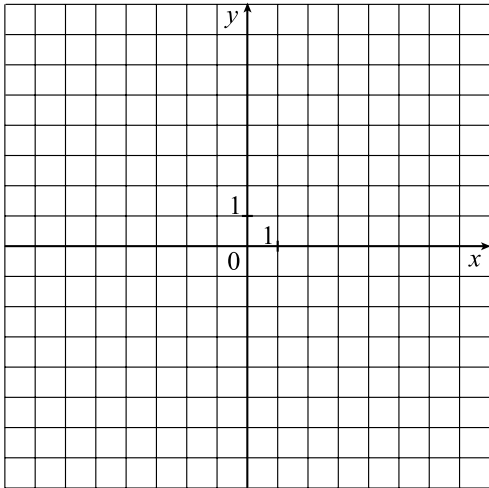
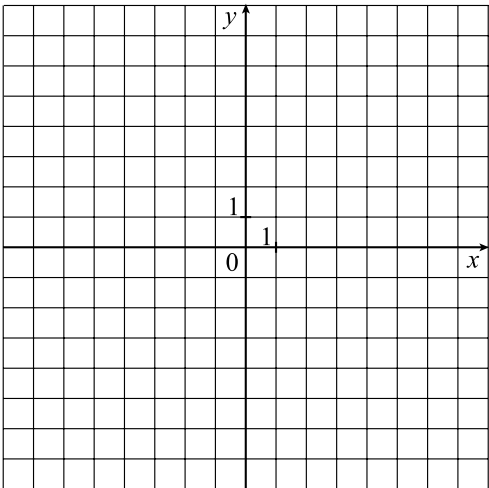
Задание 55

Определите положение точки относительно окружности $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

$A(3; 1)$	$\sigma = (3 - 2)^2 + (1 + 3)^2 - 25 = 1 + 16 - 25 < 0$, значит, точка лежит внутри окружности		
1) $B(5; 7)$		2) $B(-3; 1)$	
3) $B(6; 0)$		4) $B(-5; -3)$	
5) $B(-1; -1)$		6) $B(-2; -6)$	

Задание 56

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют условиям.

1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 16$ 	2) $4 \leq (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 16$ 
3) $x^2 + y^2 - 2y \leq 25$ 	4) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$ 
5) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 25 \\ (x-4)^2 + (y-6)^2 \leq 9 \end{cases}$ 	6) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ 

Задание 57

Составьте уравнение окружности данного радиуса R , проходящей через две заданные точки.

$R = \sqrt{26}$; $M(2; 7)$; $N(-2; 1)$	Пусть $O(x_0; y_0)$ – центр окружности. Тогда $OM = ON = R$, то есть $\begin{cases} (2-x_0)^2 + (7-y_0)^2 = 26, \\ (x_0+2)^2 + (y_0-1)^2 = 26; \end{cases} \quad \begin{cases} (2-x_0)^2 + (7-y_0)^2 = (x_0+2)^2 + (y_0-1)^2, \\ (x_0+2)^2 + (y_0-1)^2 = 26; \end{cases}$ $\begin{cases} 8x_0 + 12y_0 - 48 = 0, \\ (x_0+2)^2 + (y_0-1)^2 = 26; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \frac{12-3y_0}{2}, \\ y_0^2 - 8y_0 + 12 = 0. \end{cases}$ Отсюда получаем $O(3; 2)$ или $O(-3; 6)$. Тогда имеем две окружности, удовлетворяющие условию: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 26$ и $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 26$
1) $R = \sqrt{20}$; $M(0; 7)$; $N(6; 1)$	
2) $R = \sqrt{34}$; $M(2; -1)$; $N(9; 0)$	
3) $R = \sqrt{29}$; $M(2; 5)$; $N(-1; -2)$	

Задание 58

Составьте уравнение окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$.

1) $A(-2; 1);$ $B(0; 7);$ $C(6; 5)$	
2) $A(-1; 6);$ $B(7; 8);$ $C(9; 0)$	
3) $A(-5; 8);$ $B(2; 1);$ $C(-1; -2)$	

Задание 59

Составьте уравнение окружности с центром в данной точке, касающейся данной окружности.

$C(1; 5);$ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$	Точка $O(-2; 1)$ – центр данной окружности. $CO = \sqrt{(1+2)^2 + (5-1)^2} = 5$. $CO > 2$, значит, точка C лежит вне данной окружности, то есть касаться окружности могут внутренним и внешним образом. Пусть R – радиус искомой окружности. Условие внешнего касания – сумма радиусов окружностей равна расстоянию между их центрами. Получаем: $R + 2 = 5$; $R = 3$. Тогда уравнение искомой окружности: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$. Условие внутреннего касания – разность радиусов окружностей равна расстоянию между их центрами. Получаем: $R - 2 = 5$; $R = 7$. Тогда уравнение искомой окружности: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 49$ Ответ: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$ и $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 49$
---------------------------------------	--

	Уравнение первой окружности	Уравнение второй окружности
1) $C(2; -3);$ $(x-3)^2 + y^2 = 9$		
2) $C(4; 1);$ $x^2 + (y-4)^2 = 16$		
3) $C(4; 0);$ $x^2 + (y-3)^2 = 49$		
4) $C(-1; -1);$ $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 64$		
5) $C(8; 4);$ $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$		

Задание 60

Составьте уравнение окружности с центром C , касающейся прямой l .

$C(3; 2);$ $l: 4x - 3y + 5 = 0$	Пусть R – радиус окружности. Тогда по условию касания окружности и прямой радиус равен расстоянию от C до l: $R = \frac{ 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 5 }{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{11}{5}$. Тогда уравнение искомой окружности: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{121}{25}$.
1) $C(5; -2);$ $l: 3x + 4y + 3 = 0$	
2) $C(-3; 4);$ $l: 8x + 15y - 2 = 0$	
3) $C(5; 6);$ $l: 12x - 5y + 9 = 0$	
4) $C(-4; 7);$ $l: 5x + 3y - 2 = 0$	

Задание 61

Составьте уравнение касательной l (касательных) к данной окружности, если известно, что:

$(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 16;$ l параллельна прямой $p: 4x - 3y + 1 = 0$	$l \parallel p$, значит $l: 4x - 3y + c = 0$. Условие касания окружности и прямой – расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности. Получаем: $4 = \frac{ 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-7) + c }{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}; 4 = \frac{ 29 + c }{5}; 29 + c = 20$; откуда $c = -9$ или $c = -49$. Ответ: $l_1: 4x - 3y - 9 = 0$; $l_2: 4x - 3y - 49 = 0$.
1) $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9;$ l параллельна прямой $p: 6x + 8y - 3 = 0$	
2) $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9;$ l перпендикулярна прямой $p: 6x + 8y - 3 = 0$	

3) $x^2 + y^2 - 6x = 8$; l параллельна прямой $p: y = 4x - 1$	
4) $x^2 + y^2 - 6x = 8$; l перпендикулярна прямой $p: y = 4x - 1$	
5) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 29$; l параллельна прямой $p: 2x - 5y - 2 = 0$	
6) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 29$; l перпендикулярна прямой $p: 2x - 5y - 2 = 0$	

Задание 62

Заполните пустые ячейки в таблице.

№	Координаты центра окружности	Уравнение окружности	Уравнение секущей прямой	Длина хорды, которую окружность высекает на секущей прямой
1)	$C(5; 4)$		$x + 2y - 3 = 0$	8
2)	$C(3; 1)$		$5x - 12y + 10 = 0$	10
3)	$C(-1; 3)$		$y = 7x + 20$	$2\sqrt{7}$
4)		$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 36$	$2x + 5y - 16 = 0$	
5)		$x^2 + (y - 5)^2 = 81$	$4x - y - 12 = 0$	
6)		$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 100$	$y = 5x - 6$	

Задание 63
Проверьте себя.

А) Отметьте верные утверждения галочкой.

1) Точка $(2; 7)$ лежит внутри окружности, заданной уравнением $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$	
2) Найдётся значение параметра a , при котором окружность, заданная уравнением $(x-1)^2 + (y+a)^2 = 4$, касается оси абсцисс	
3) Найдётся значение параметра a , при котором окружность, заданная уравнением $(x-2)^2 + (y-3)^2 = a$, касается оси ординат	
4) Окружность, заданная уравнением $(x-a)^2 + (y+a)^2 = a^2$, касается осей координат при любом значении параметра a	
5) Найдётся такое значение параметра a , при котором окружность, заданная уравнением $(x-a)^2 + (y+a)^2 = 16$, полностью лежит в первой координатной четверти	
6) Прямая, заданная уравнением $2x-5y-2=0$, пересекает окружность, заданную уравнением $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 3$	
7) Окружности, заданные уравнениями $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$ и $(x-15)^2 + (y+8)^2 = 289$, касаются	

Б) Укажите номер правильного ответа: _____

Окружность, с центром $(3; -1)$ и радиусом $\sqrt{7}$, задаётся уравнением:

1. $(x-3)^2 - (y+1)^2 = 7$	3. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 7$
2. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 7$	4. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{7}$

В) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют условиям:

1) $9 \leq (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 16$	2) $(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 10$
---	--

Г) Составьте уравнение окружности с центром в данной точке, касающейся данной окружности.

1) $C(1; -2)$; $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$	Ответ: _____
2) $C(3; -3)$; $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 36$	Ответ: _____

Д) Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки $(5; 6)$ к окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$.

Ответ: _____

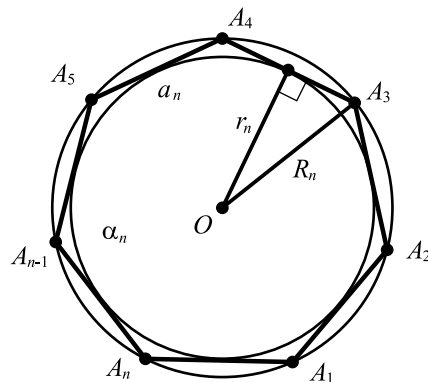
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ



Важно знать:

- Выпуклый многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все его углы равны.
- Сумма углов правильного n -угольника (как и любого выпуклого n -угольника) равна $(n-2) \cdot 180^\circ$. Каждый угол правильного n -угольника равен $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.
- Около любого правильного многоугольника можно описать окружность (и притом только одну), и в каждый правильный многоугольник можно вписать окружность (и притом только одну). Центры этих окружностей совпадают.



- Площадь правильного многоугольника можно вычислить по формуле $S = pr$, где p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности многоугольника. Если сторону правильного n -угольника обозначить a_n , то $p = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a_n$.
- Сторона правильного n -угольника a_n , радиусы его описанной (R_n) и вписанной (r_n) окружностей связаны формулами: $a_n = 2R_n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$; $a_n = r_n \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$.

В частности:

✓ для правильного треугольника $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

✓ для правильного четырёхугольника $r = \frac{a}{2}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $S = a^2$;

✓ для правильного шестиугольника $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = a$; $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Полезно знать: $\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\cos 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}; \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

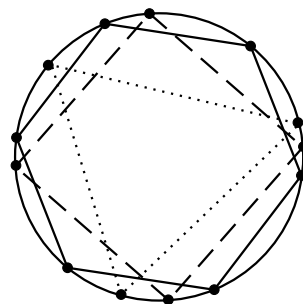
Задание 64

Заполните таблицу (для правильных многоугольников).

	n	Сумма углов	a_n		n	Сумма углов	a_n
1)	3			2)	4		
3)	12			4)	18		
5)			120°	6)			135°
7)			144°	8)			156°
9)		720°		10)		6120°	

Задание 65

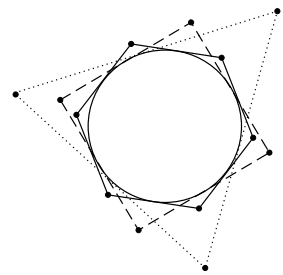
Пусть в одну окружность вписаны правильный треугольник, четырёхугольник и шестиугольник. Найдите отношение указанных периметров и площадей.



1) $P_2 : P_4$	Ответ: _____
2) $P_3 : P_6$	Ответ: _____
3) $P_4 : P_6$	Ответ: _____
4) $S_2 : S_4$	Ответ: _____
5) $S_3 : S_6$	Ответ: _____
6) $S_4 : S_6$	Ответ: _____

Задание 66

Пусть вокруг одной окружности описаны правильный треугольник, четырёхугольник и шестиугольник. Найдите отношение указанных периметров и площадей.



1) $P_2 : P_4$	Ответ: _____
2) $P_3 : P_6$	Ответ: _____
3) $P_4 : P_6$	Ответ: _____
4) $S_2 : S_4$	Ответ: _____
5) $S_3 : S_6$	Ответ: _____
6) $S_4 : S_6$	Ответ: _____

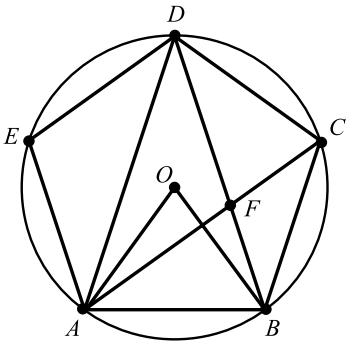
Задание 67

Заполните таблицу (для правильных многоугольников).

	n	a_n	r_n	R_n	S_n
1)	3	12			
2)	4			$8\sqrt{6}$	
3)	6				$24\sqrt{3}$
4)		24	12		
5)			6	12	
6)			4	$4\sqrt{2}$	
7)		10		10	
8)	8			4	

Задание 68

Выполните задания для правильного пятиугольника (см. чертёж).



1) Найдите величину угла ABC	
2) Найдите величину угла AOB	
3) Найдите величину угла между диагоналями, выходящими из одной вершины	
4) Найдите величину угла ACB	
5) Докажите, что треугольники ADB и AFB подобны	

6) Докажите, что длина отрезка DF равна длине стороны пятиугольника	
7) Определите вид четырёхугольника $ABCD$	
8) Докажите, что треугольники ADF и CFB подобны	
9) Докажите, что все диагонали равны, и вырази их длину через длину стороны пятиугольника	
10) Выразите радиус описанной окружности через сторону пятиугольника	
11) Выразите площадь пятиугольника через его сторону	

Задание 69
Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Угол правильного многоугольника может быть больше 175°	
2) Угол правильного многоугольника может быть меньше 50°	
3) Площадь правильного многоугольника может быть в 6 раз больше площади правильного треугольника, построенного на его стороне	
4) Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, может быть в 2 раза больше радиуса вписанной в него окружности	
5) Площадь правильного десятиугольника, вписанного в окружность, больше площади квадрата, вписанного в ту же окружность	
6) Площадь правильного треугольника, описанного вокруг окружности, больше площади квадрата, описанного вокруг той же окружности	
7) Площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса 5, больше 30	

Б) В окружность вписан правильный n -угольник и вокруг неё же описан правильный n -угольник. Найдите отношение сторон этих многоугольников, если:

$n = 3$	
$n = 4$	
$n = 6$	

В) Выполните задания.

1) Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Определите вид четырёхугольника $BCDE$ и выразите его площадь через радиус описанной окружности	
2) Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Определите вид четырёхугольника $ABDE$ и выразите его площадь через радиус описанной окружности	
3) Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$. Определите вид четырёхугольника $ABEF$ и выразите его площадь через радиус описанной окружности	

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА



Важно знать:

- Длина C окружности вычисляется по формуле: $C = 2\pi R$, где R – радиус окружности.
- Длина l дуги окружности вычисляется по формуле: $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$, где R – радиус окружности, α – градусная мера дуги.
- Площадь S круга вычисляется по формуле: $S = \pi R^2$, где R – радиус круга.
- Площадь S кругового сектора с углом α вычисляется по формуле: $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, где R – радиус круга.

Задание 70

Используя данные чертежа, заполните таблицу.

	Длина окружности, C	Длина дуги, l	Площадь круга, S	Площадь сектора, S_0
1) 				
2) 				
3) 				
4) 				
5) 				

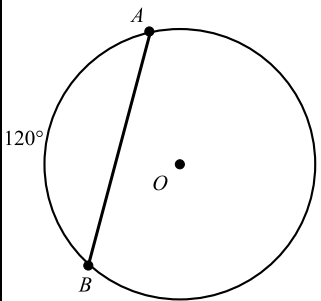
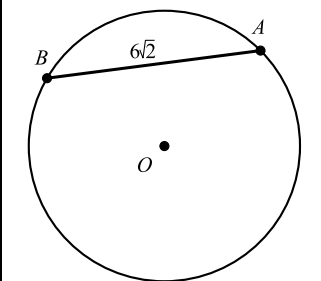
Задание 71

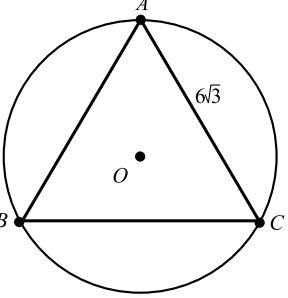
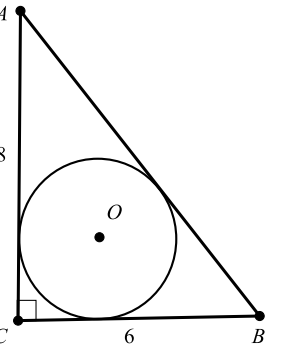
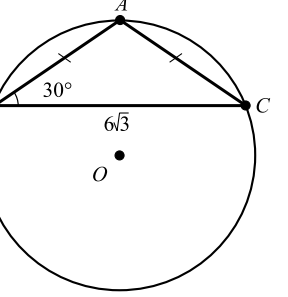
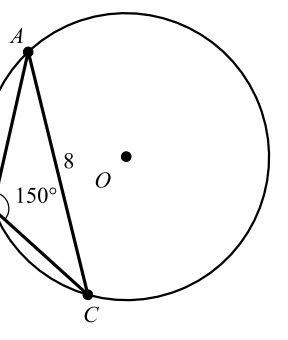
Используя данные чертежа, заполните таблицу (найди неизвестные радиус окружности R и длину окружности C ; величину центрального угла α , который стягивает дугу l и задаёт сектор; длину дуги l ; площадь круга радиуса R и площадь S_0 сектора).

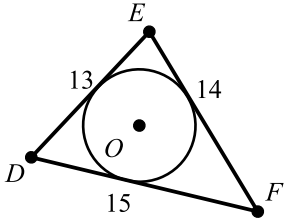
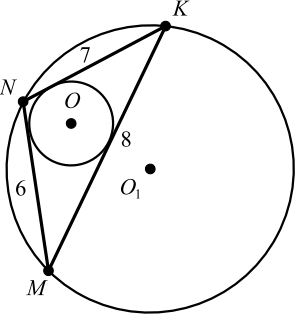
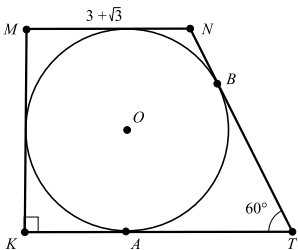
	R	α	C	S	l	S_0
1)		120°	20π			
2)			16π			
3)				25π		
4)			12π			
5)		18°				
6)				12π	$\pi\sqrt{3}$	

Задание 72

По данным чертежа найдите неизвестные величины (C – длина окружности, S – площадь круга, l_{XY} – длина меньшей дуги XY , S_{XY} – площадь меньшего сегмента, образованного хордой XY).

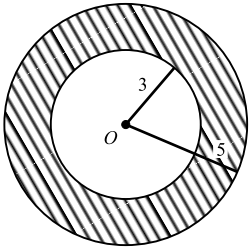
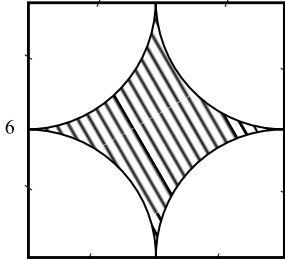
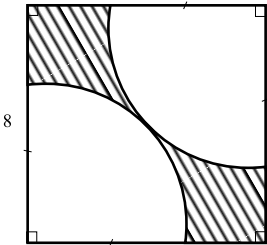
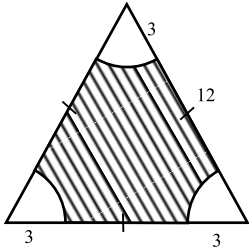
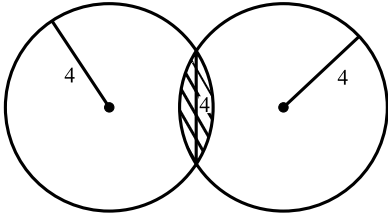
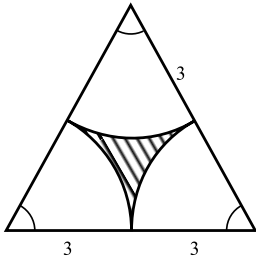
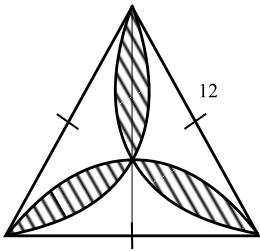
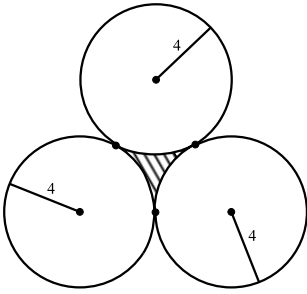
1) $C = 12\pi\sqrt{3}$ 	AB	S_{AB}
	Ответ: _____	Ответ: _____
2) $\sphericalangle AB = 90^\circ$ 	l_{AB}	S_{AB}
	Ответ: _____	Ответ: _____

3) $AB = BC = AC$ 	S	S_{BC}
	Ответ: _____	Ответ: _____
4) 	S	C
	Ответ: _____	Ответ: _____
5) 	l_{AB}	S
	Ответ: _____	Ответ: _____
6) 	C	S_{AC}
	Ответ: _____	Ответ: _____

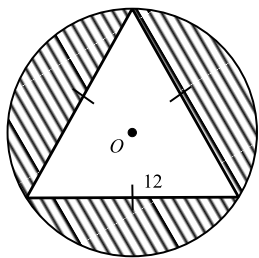
7) 	$S_{\triangle DEF}$ Ответ: _____	S Ответ: _____
8) 	C (описанной окружности) Ответ: _____	S (вписанного круга) Ответ: _____
9) $ABCD$ – трапеция 	S (вписанного круга) Ответ: _____	l_{AB} Ответ: _____

Задание 73

По данным чертежа найдите площадь заштрихованной фигуры.

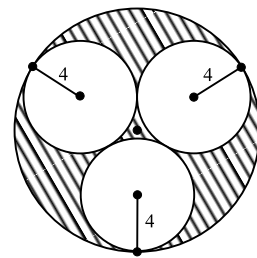
1)  Ответ: _____	2)  Ответ: _____
3)  Ответ: _____	4)  Ответ: _____
5)  Ответ: _____	6)  Ответ: _____
7)  Ответ: _____	8)  Ответ: _____

9)



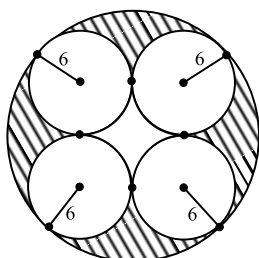
Ответ: _____

10)



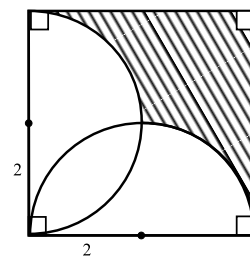
Ответ: _____

11)



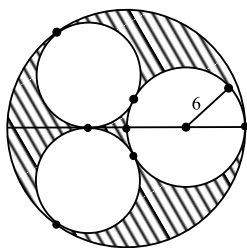
Ответ: _____

12)



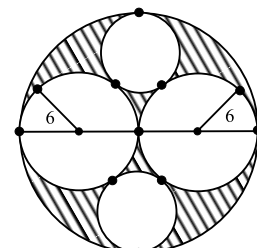
Ответ: _____

13)



Ответ: _____

14)



Ответ: _____

Задание 74
Проверьте себя.

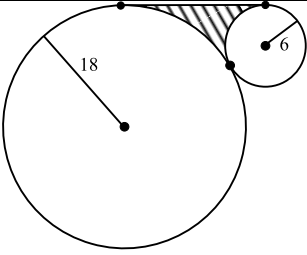
А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Длина окружности прямо пропорциональна длине её диаметра	
2) Длины двух дуг одной окружности равны тогда и только тогда, когда они имеют равные градусные меры	
3) Если два вписанных угла одной окружности равны, то равны длины дуг, на которые они опираются	
4) Чем больше хорда, тем больше площадь сектора, который она задаёт	
5) Чем меньше хорда, тем меньше длина стягиваемой ею дуги	
6) Зная радиус круга и длину хорды, можно найти площадь сегмента, отсекаемого этой хордой	
7) Площадь сектора, задаваемого двумя радиусами окружности, всегда больше площади треугольника, задаваемого теми же радиусами	
8) Если два круга касаются внутренним образом, то площадь меньшего из них составляет не более 50% площади большего	

Б) Заполните таблицу.

	Радиус окружности	Длина окружности	Площадь круга	Центральный угол	Длина дуги	Площадь сектора
1)	12			72°		
2)		16π				
3)			27π			
4)		12π				

В) Выполните задания.

1) Окружность радиуса 18 разогнута в дугу, центральный угол которой равен 135°. Найдите радиус этой дуги. Ответ: _____	2) Найдите площадь заштрихованной фигуры по данным чертежа:  Ответ: _____
---	--

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ



Важно знать:

- Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния, называется движением.
- Движение переводит отрезок – в отрезок, луч – в луч, прямую – в прямую.
- Движение сохраняет равенство углов и равенство фигур.
- Движение однозначно задаётся тремя точками, не лежащими на одной прямой.
- Точка называется неподвижной при данном преобразовании, если её образ совпадает с самой точкой.
- Любое движение имеет обратное преобразование, которое тоже является движением.
- Композиция движений – движение.

Задание 75

Даны преобразования плоскости (в прямоугольной системе координат). Определите, какие из них являются движениями.

$f((x; y)) = (x - 1; y + 4)$ Ответ: да	Пусть для произвольных точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$. Тогда $A_1(x_1 - 1; y_1 + 4)$, $B_1(x_2 - 1; y_2 + 4)$. Тогда $A_1B_1 = \sqrt{((x_1 - 1) - (x_2 - 1))^2 + ((y_1 + 4) - (y_2 + 4))^2} =$ $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = AB$. Поскольку для произвольных точек при преобразовании f сохранилось расстояние между ними, значит, f – движение.
1) $f((x; y)) = (x + 2; 1 - y)$ Ответ: _____	
2) $f((x; y)) = (2x - 1; y)$ Ответ: _____	
3) $f((x; y)) = (2x; 2y - 1)$ Ответ: _____	

4) $f((x; y)) = (y - 3; x + 2)$	
Ответ: _____	
5) $f((x; y)) = (y + 5; x + y)$	
Ответ: _____	
6) $f((x; y)) = \left(\frac{x - y + 1}{\sqrt{2}}; \frac{x + y}{\sqrt{2}} \right)$	
Ответ: _____	

Задание 76

Дано преобразование, являющееся движением. Найдите обратное преобразование и неподвижные точки, если они есть.

	Обратное преобразование	Неподвижные точки
$f((x; y)) = (x - 1; y + 4)$ Ответ: $f^{-1}((x; y)) = (x + 1; y - 4)$ Неподвижных точек нет	Пусть обратное преобразование имеет вид: $f^{-1}((x; y)) = (x_1; y_1)$. Тогда $f(x_1; y_1) = (x; y)$. Но $f(x_1; y_1) = (x_1 - 1; y_1 + 4)$, то есть $\begin{cases} x = x_1 - 1, \\ y = y_1 + 4. \end{cases}$ Откуда $\begin{cases} x_1 = x + 1, \\ y_1 = y - 4. \end{cases}$ Значит, $f^{-1}((x; y)) = (x + 1; y - 4)$	Пусть $A(x_0; y_0)$ – неподвижная точка. Тогда $f(A) = A$, то есть $\begin{cases} x = x - 1, \\ y = y + 4. \end{cases}$ Такая система не имеет решений, поэтому данное движение не имеет неподвижных точек.
1) $f((x; y)) = (x + 5; 2 - y)$ Ответ: _____ _____		

2) $f((x; y)) = (5 - y; x + 2)$ Ответ: _____ _____		
3) $f((x; y)) = (y + 3; 2 - x)$ Ответ: _____ _____		
4) $f((x; y)) = (y - 1; x + 1)$ Ответ: _____ _____		

Задание 77

Найдите образ и прообраз прямой $l: y = 1 - x$ при указанном преобразовании.

	Образ l (обозначим l_1)	Прообраз l (обозначим l_2)
$f((x; y)) = (x - 1; y + 4)$ Ответ: $l_1: y = 4 - x$ $l_2: y = -x - 2$	Прямая l – это множество точек с координатами $(x; 1 - x)$. При данном преобразовании это множество перейдёт в множество точек с координатами $(x - 1; 1 - x + 4)$: $\{(x; 1 - x)\} \rightarrow \{(x - 1; 5 - x)\}$. Но последнее множество равно множеству $\{(x; 4 - x)\}$ Значит, $l_1: y = 4 - x$.	В задании 76 было найдено обратное движение $f^{-1}((x; y)) = (x + 1; y - 4)$. При этом движении $\{(x; 1 - x)\} \rightarrow \{(x + 1; -x - 3)\}$ Это множество равно множеству $\{(x; -x - 2)\}$. Значит, $l_2: y = -x - 2$

1) $f((x; y)) = (x + 5; 2 - y)$ Ответ: l_1: _____ l_2: _____		
2) $f((x; y)) = (5 - y; x + 2)$ Ответ: l_1: _____ l_2: _____		
3) $f((x; y)) = (y + 3; 2 - x)$ Ответ: l_1: _____ l_2: _____		
4) $f((x; y)) = (y - 1; x + 1)$ Ответ: l_1: _____ l_2: _____		

Задание 78

Проверьте себя.

А) Дано преобразование $f((x; y)) = (2 - x; y + 1)$. Выполни задания.

1) Докажите, что f – движение	
2) Найдите $f((0; 0))$	
3) Найдите $f((3; 1))$	
4) Найдите $f^{-1}((0; 0))$	
5) Найдите $f^{-1}((x; y))$	
6) Найдите образ окружности с центром $(2; 1)$ и радиусом 3 (напиши уравнение)	
7) Найдите образ прямой $l: y = 2x + 3$	
8) Найдите прообраз прямой $m: y = 2 - x$	
9) Имеет ли это движение неподвижную точку?	
10) Имеет ли это движение прямую, переходящую в себя?	

ВИДЫ ДВИЖЕНИЙ



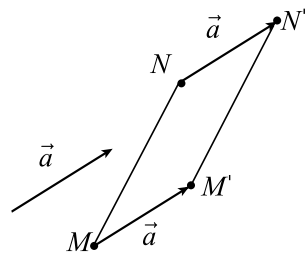
Важно знать:

- **Параллельный перенос** на вектор $\vec{a}$ – это преобразование плоскости, при котором каждая точка X плоскости переходит в такую точку X_1 плоскости, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$.

✓ Параллельный перенос является движением. Обратное движение – параллельный перенос на вектор $-\vec{a}$.

✓ При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую.

✓ Параллельный перенос на ненулевой вектор не имеет неподвижных точек.



Обозначается $P_{\vec{a}}$.

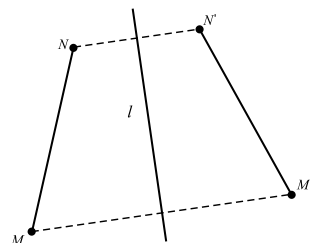
- **Осевая симметрия** относительно прямой l – это преобразование плоскости, при котором каждая точка X плоскости переходит в такую точку X_1 плоскости, что $X = X_1$, если $X \in l$, иначе l является серединным перпендикуляром к отрезку XX_1 .

✓ Осевая симметрия является движением. Обратное движение – осевая симметрия относительно той же прямой.

✓ Ось симметрии является неподвижной прямой, то есть состоит из неподвижных точек.

✓ Прямые, перпендикулярные оси симметрии, переходят в себя.

✓ Точки, лежащие на стороне угла, при симметрии относительно биссектрисы этого угла отображаются на другую сторону угла.



Обозначается S_l .

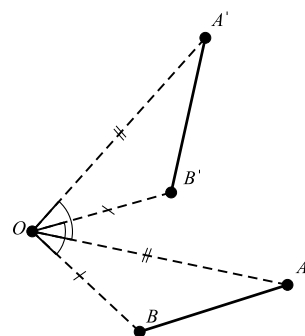
- **Поворот вокруг точки O** на угол α (считая против часовой стрелки) – это преобразование плоскости, при котором точка O остаётся неподвижной, а каждая другая точка X плоскости переходит в такую точку X_1 плоскости, что $OX = OX_1$ и $\widehat{XOX_1} = \alpha$. Угол считают меньшим 360° .

✓ Поворот является движением. Обратное движение – поворот относительно точки O на угол $-\alpha$ (то есть в обратном направлении относительно часовой стрелки).

✓ Композиция двух поворотов с общим центром – поворот относительно этого центра на суммарный угол (с учётом направлений поворотов).

✓ Центр поворота – единственная неподвижная точка.

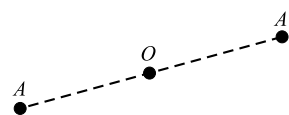
Обозначается R_O^α .



- Поворот вокруг точки O на угол 180° называется **центральной симметрией** относительно точки O .

✓ Центральная симметрия переводит прямую в параллельную (или в себя).

Обозначается Z_O .



Задание 79

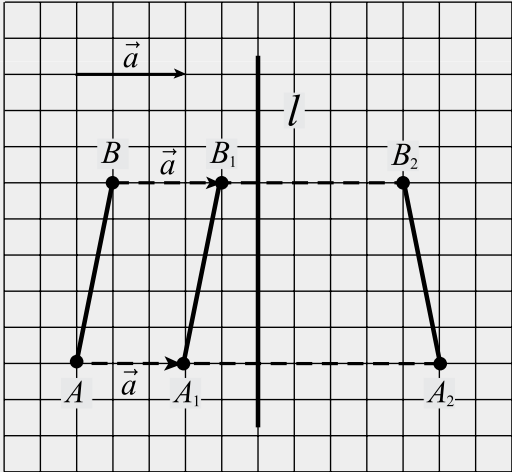
Заполните таблицу ($\vec{a}$ – вектор параллельного переноса).

Начальный объект (объекты)	$\vec{a}$	Конечный объект
1) $A(3; -1); B(-2; 5)$	$\vec{a}(5; -7)$	$A'(\quad; \quad); B'(\quad; \quad)$
2) $A(2; 7); B(3; -4)$	$\vec{a}(\quad; \quad)$	$A'(-4; 5); B'(\quad; \quad)$
3) $l: y=5x-3$	$\vec{a}(1; 2)$	$l': y=$ _____
4) $l: y=2x+1$	$\vec{a}(\quad; \quad)$	$l': y=2x-7$
5) l : _____	$\vec{a}(-1; 3)$	$l': y=2-x$
6) $\omega: (x-1)^2+y^2=25$	$\vec{a}(5; 1)$	ω' : _____
7) $\omega: (x+1)^2+(y-2)^2=16$	$\vec{a}(\quad; \quad)$	$\omega': (x-4)^2+(y-1)^2=16$

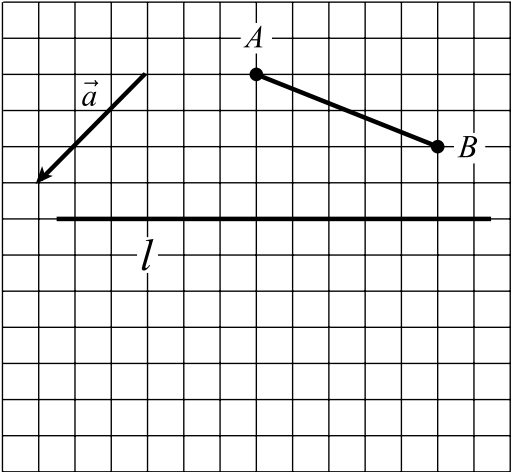
Задание 80

Изобразите на чертеже образ указанного объекта при данных преобразованиях.

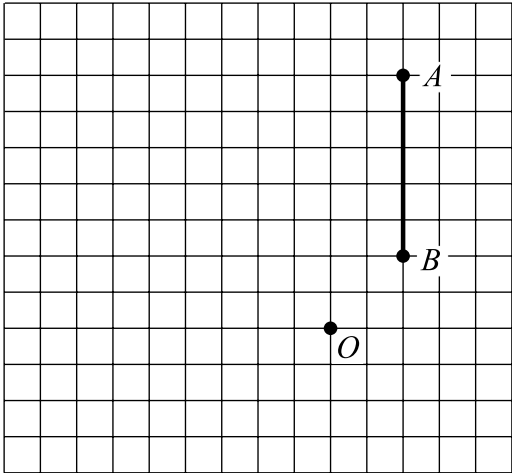
а) $P_{\vec{a}}$;
б) S_l



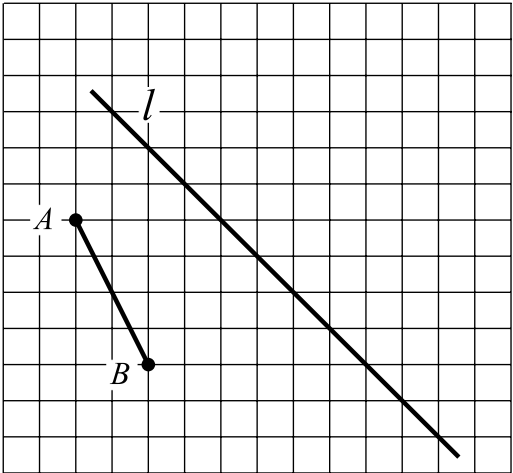
1. а) $P_{\vec{a}}$;
б) S_l



2. а) $R_B^{90^\circ}$;
б) $R_O^{90^\circ}$

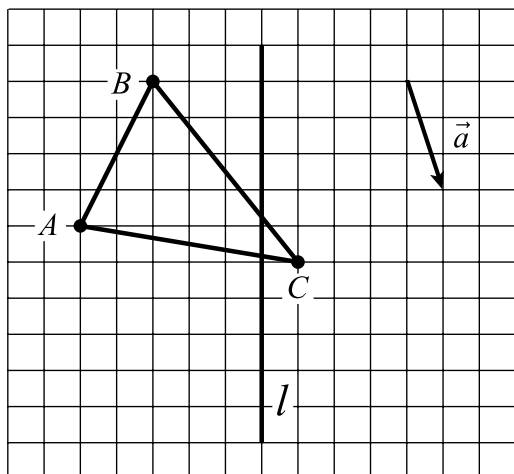


3. а) $R_A^{90^\circ}$;
б) S_l



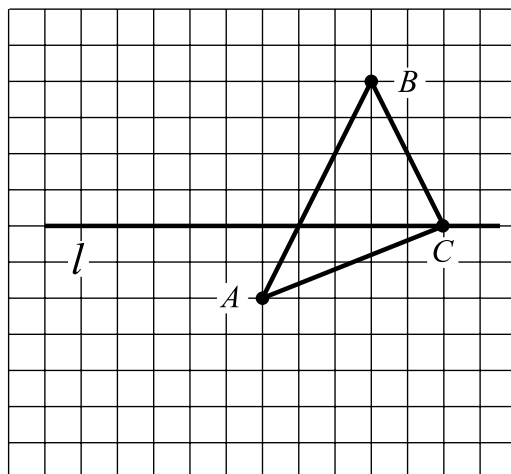
4. a) $P_{\vec{a}}$;

б) S_l



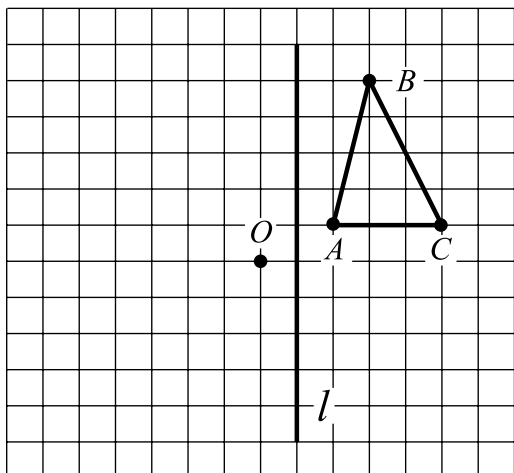
5. a) $R_A^{90^\circ}$;

б) S_l



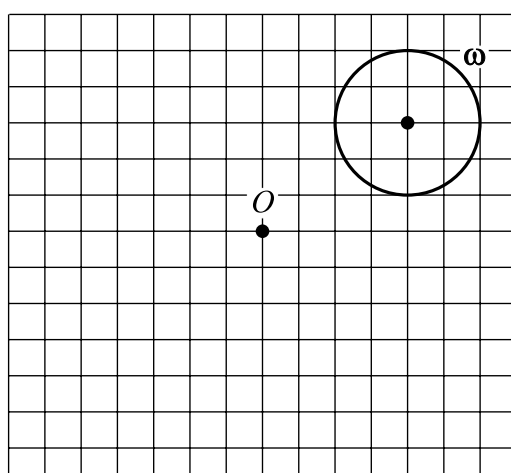
6. a) $R_O^{180^\circ}$;

б) S_l



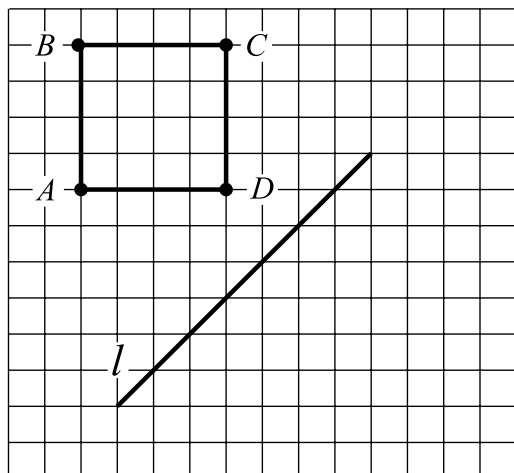
7. a) Z_O ;

б) $R_O^{-90^\circ}$



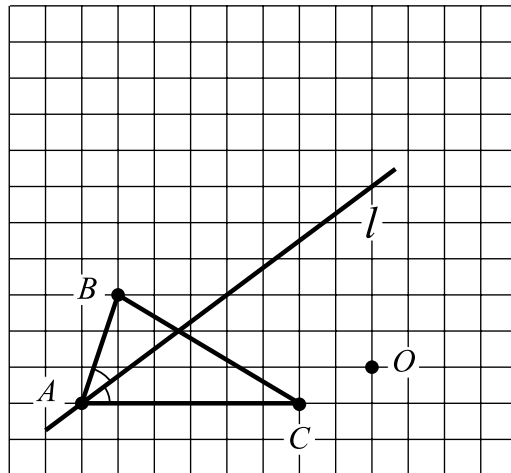
8. a) $R_D^{-90^\circ}$;

б) S_l



9. a) S_l ;

б) $R_O^{-90^\circ}$



Задание 81

Отметьте ось симметрии (1–4) и центр поворота (5–9), переводящие AB в $A'B'$.

1) 	2) 	3)
4) 	5) 	6)
7) 	8) 	9)

Задание 82

Даны правильные многоугольники. Рассматриваются повороты на угол α вокруг точки O – центра многоугольника. Укажите **все** возможные значения α от 0° до 180° , при которых многоугольник перейдёт в себя при указанном повороте.

	1) 	2) 	3) 	4)
α				

Задание 83

- 1) На сторонах BC и AB треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABMN$ и $BCPQ$ (см. чертёж).

Докажите, что отрезки AQ и CM перпендикулярны и равны.

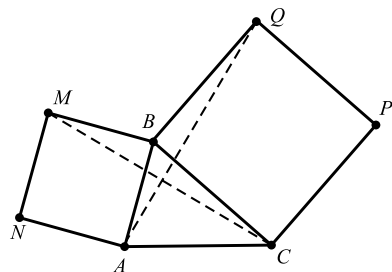
Для этого заполните пробелы в решении.

Рассмотрим поворот $R_B^{90^\circ}$.

Тогда точка M перейдёт в точку _____, а точка C перейдёт в точку _____.

Значит, отрезок MC перейдёт в отрезок _____.

А тогда по определению поворота отрезки MC и AQ _____.

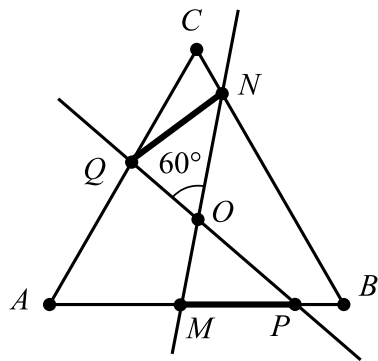


- 2) Дан равносторонний треугольник ABC с центром O .

Прямые MN и PQ пересекаются под углом 60° (см. чертёж).

Докажите, что $MP = NQ$.

Для этого заполните пробелы в решении.



Рассмотрим поворот $R_O^{120^\circ}$.

Тогда точка C перейдёт в точку _____, а точка A перейдёт в точку _____.

Значит, отрезок CA перейдёт в отрезок _____.

С другой стороны, прямая PQ при таком повороте перейдёт в прямую _____.

То есть точка, которая является пересечением AC и PQ , перейдёт в точку пересечения _____ и _____, в точку _____.

Значит, по определению поворота $OQ =$ _____.

Аналогично образ точки P при указанном повороте – точка _____.

Откуда по определению поворота $OP =$ _____.

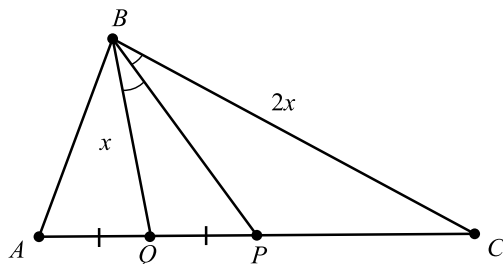
Тогда в треугольниках QON и MOP имеем равные величины _____.

Значит, $\triangle QON = \triangle MOP$, следовательно, $QN = MP$.

Задание 84

- 1) На стороне AC треугольника ABC взяли точки P и Q так, что Q – середина AP , BP – биссектриса угла QBC и $BC = 2BQ$. Докажите, что углы ACB и ABQ равны.

Для этого заполните пробелы в решении.



Рассмотрим симметрию S_{BP} – см. чертёж.

Тогда образ точки C – точка C' – лежит на луче _____,

так как _____, причём $BC = BC' = 2x$.

Значит, $BQ = QC'$.

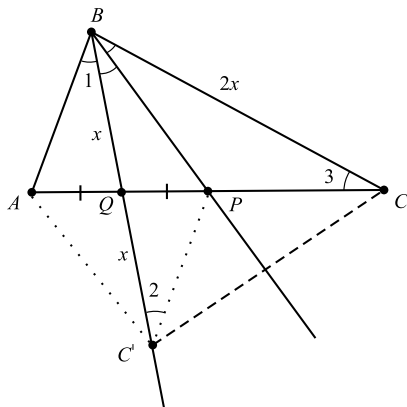
Получаем, что в четырёхугольнике $ABPC'$ диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Следовательно, $ABPC'$ – _____.

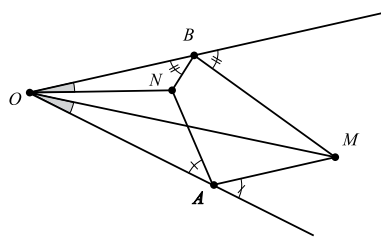
Тогда $\angle 1 = \angle 2$.

Но по свойствам симметрии $\angle$ _____ = $\angle$ _____.

В итоге получаем $\angle 1 = \angle 3$, то есть углы ACB и ABQ равны.



- 2) Внутри острого угла AOB взяты точки M и N так, что равны углы NOB и MOA (см. чертёж). Точки A и B таковы, что свет, выпущенный из точки M , отразившись от сторон угла в точках A и B попадает в точку N . Докажите, что равны длины ломаных MAN и MBN .



Для этого заполните пробелы в решении.

Условие означает, что равны углы при точках A и B как показано на чертеже.

Рассмотрим симметрию точки M относительно сторон угла AOB – получим точки M' и M'' (см. чертёж).

Тогда в силу равенства углов длина ломаной MAN равна длине отрезка _____, а длина ломаной MBN равна длине отрезка _____.

То есть теперь достаточно доказать равенство отрезков _____.

Рассмотрим треугольники ONM' и ONM'' .

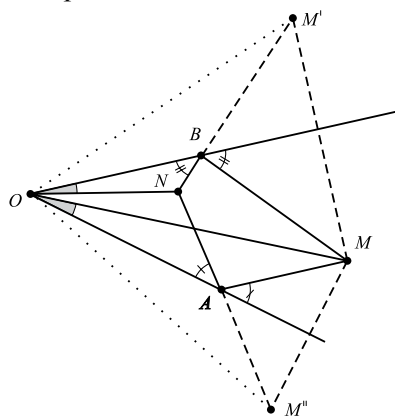
В них равны отрезки OM' и OM'' , так как по свойствам осевой симметрии оба эти отрезка равны отрезку _____.

Отрезок ON – общий для этих треугольников.

Из равенства углов NOB и MOA следует равенство углов MOB и NOA . Но из свойств симметрии

равны пары углов BOM' и _____, AOM'' и _____. Тогда получаем равенство углов _____ (как суммы равных углов).

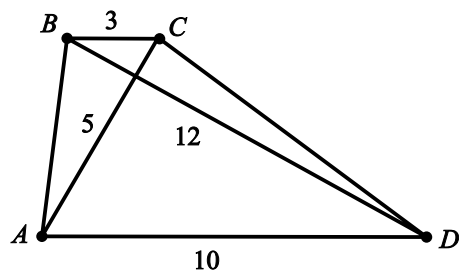
Таким образом, треугольники ONM' и ONM'' равны. Следовательно, равны отрезки _____, откуда равны длины ломаных MAN и MBN .



Задание 85

- 1) В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны соответственно 3 и 10. Диагонали трапеции равны 5 и 12. Найдите площадь трапеции.

Для этого заполните пробелы в решении.



Выполним параллельный перенос отрезка BD на вектор

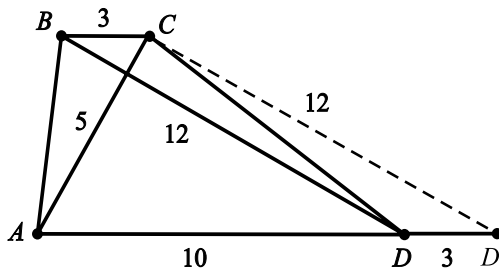
$\overrightarrow{BC}$ – см. чертёж.

Тогда четырёхугольник $BCD'D$ – _____.

Следовательно, $CD' = BD = 12$; $D'D =$ _____.

Тогда треугольник ACD' – прямоугольный

(по _____).



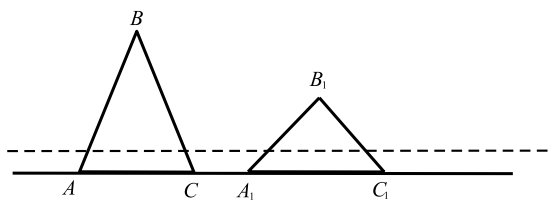
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AD' \cdot h, \text{ то есть площадь трапеции равна площади треугольника}$$

_____.

Получаем, что $S_{ABCD} =$ _____.

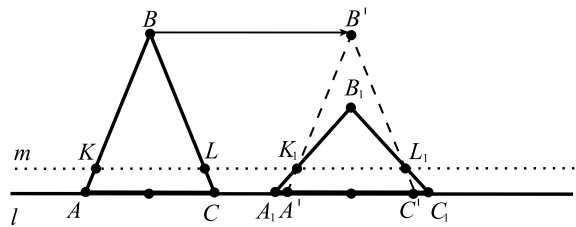
Ответ: _____.

2) Даны два равнобедренных треугольника, основания которых расположены на одной прямой l (см. чертёж). Проведите прямую, параллельную l , так, чтобы отрезки этой прямой, находящиеся внутри треугольников, были равны (без исследования).



Для решения задачи заполните пропуски в решении.

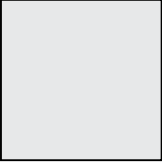
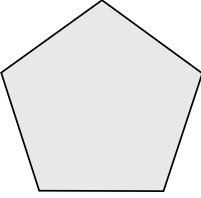
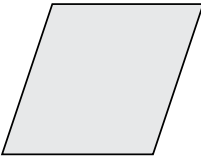
Выполним параллельный перенос вдоль прямой l так, чтобы совместились центры оснований треугольников (см. чертёж). Отметим точки пересечения сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$ – точки K_1 и L_1 . Проведём через эти точки прямую m . Эта прямая – искомая. Отрезки KL и K_1L_1 равны, так как _____



Задание 86

Проверьте себя.

А) Отметьте, какие из данных свойств имеют фигуры:

	1) Квадрат	2) Правильный пятиугольник	3) Параллелограмм	4) Равнобедренная трапеция
				
1) имеет ось симметрии				
2) имеет несколько осей симметрии				
3) имеет центр симметрии				
4) имеет центр, поворот вокруг которого на угол от 5° до 185° переводит фигуру в себя.				

Б) Изобразите на чертеже образ указанного объекта при данных преобразованиях.

1) $P_{\vec{a}}; S_l$

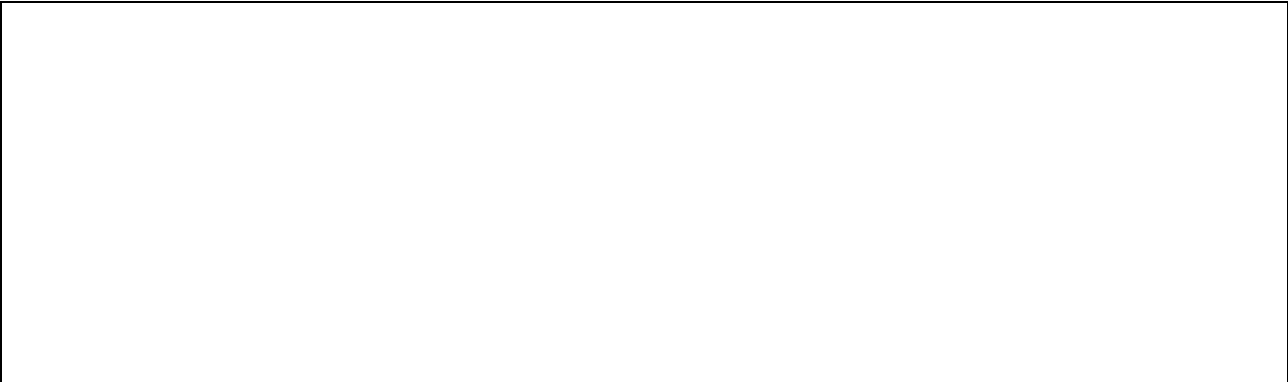
2) $S_l; R_A^{90^\circ}$

В) Отметьте ось симметрии (1) и центр поворота (2), переводящие AB в A_1B_1 .

1)

2)

Г) Точка B лежит на отрезке AC . В одной полуплоскости, ограниченной прямой AC построены равно-
 сторонние треугольники ABP и BCQ . Точки X и Y – середины отрезков AQ и PC соответственно.
 Докажите, что треугольник BXY – равносторонний.



Д) Дан треугольник ABC . Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно биссектрис углов A и B соответственно. Докажите, что середина отрезка C_1C_2 – точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AB .

ОТВЕТЫ

к некоторым заданиям разделов «Проверьте себя»

ТРИГОНОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Задание 4

А) 1; 3; 6; 7; 8; 9.

Б) 1) $\frac{15}{17}$; $-\frac{15}{8}$;

2) $\frac{5}{13}$; $-\frac{12}{13}$;

3) $\frac{3}{5}$.

Задание 7

А) 1; 2; 3.

Б) 1) $\frac{24}{25}$;

2) $\frac{60}{61}$;

3) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$;

4) 12.

Задание 12

А) 1; 3; 4.

Б) 1) $\frac{7}{25}$; $\frac{25}{4}$; $\sqrt{97}$;

2) $-\frac{2}{3}$; $2\sqrt{30}$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

ВЕКТОРЫ

Задание 17

А) 3; 4; 5; 7; 8; 10.

Б) 1) 20; $4\sqrt{13}$;

2) 12; $\sqrt{193}$;

3) 8; $4\sqrt{3}$.

Задание 22

А) 2; 3; 5; 6; 7; 8; номер 10 – 11 целых чисел.

Б) 3) 10; 5; 0; 6; $2\sqrt{73}$.

Задание 31

А) 1) 35;

2) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

3) $\overrightarrow{OF} = \frac{7}{12}\overrightarrow{ON} + \frac{5}{12}\overrightarrow{OM}$;

4) $x = -\frac{5}{8}$; $y = \frac{13}{8}$;

5) $k = 2$; $k = 3$.

Б) 1) $\overrightarrow{OC}\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); \overrightarrow{PN}\left(2; -\frac{1}{2}\right);$
 2) $\overrightarrow{LC}\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \overrightarrow{BK}\left(-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right).$

Задание 39

А) 61.
 Б) 1) -6
 2) -38 ;
 3) 7 .
 В) 1) 0 ;
 2) 21 ;
 3) -15 ;
 4) $\frac{\sqrt{157}}{6}$;
 5) $\frac{28}{\sqrt{157}}$.
 Г) 1) 0 ;
 2) -100 ;
 3) 21 ;
 4) $\sqrt{97}$;
 5) $-\frac{7}{\sqrt{1455}}$.

МЕТОД КООРДИНАТ

Задание 43

Б) 1) $(7; -7)$;
 2) $(1,8; 4,6)$;
 3) $\left(\frac{10}{7}; \frac{12}{7}\right)$;
 4) $(26; -7)$;
 5) $-\frac{44}{13\sqrt{265}}$.

Задание 53

Б) 1) $x + y - 5 = 0$; $x - y - 1 = 0$;
 2) $2x - 3y - 9 = 0$; $3x + 2y - 19 = 0$;
 3) $3x + 4y - 29 = 0$; $4x - 3y + 3 = 0$.
 В) 1) $7x - 11y + 64 = 0$;
 2) $\frac{145}{\sqrt{170}}$;
 3) $\frac{145}{2}$.

Задание 63

А) 2; 3; 4; 6.
 Б) 3.
 Г) 1) $5x + (12 + 2\sqrt{21})y + 19 + 4\sqrt{21} = 0$; $5x + (12 - 2\sqrt{21})y + 19 - 4\sqrt{21} = 0$;
 2) $x - 3 = 0$; $5x + 12y + 21 = 0$.
 Д) 10.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА

Задание 69

Б) $1:2$; $1:\sqrt{2}$; $\sqrt{3}:2$.

В) 1) равнобедренная трапеция; $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$;

2) прямоугольник; $S = R^2\sqrt{3}$;

3) прямоугольник; $S = R^2\sqrt{2}$.

Задание 74

А) 1; 2; 3; 6.

В) 1) 48;

2) $144\sqrt{3} - 66\pi$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Задание 78

А) 4) $(2; -1)$;

5) $f^{-1}((x; y)) = (2 - x; y - 1)$;

6) $x^2 + (y - 2)^2 = 9$;

7) $y = 8 - 2x$;

8) $y = x - 1$;

9) нет;

10) да, например $x = 1$.

Задание 86

Г) Подсказка: рассмотрите $R_B^{60^\circ}$.

Д) Подсказка: докажите, что центр вписанной в треугольник ABC окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку C_1C_2 .

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Тригонометрия	4
Определение тригонометрических функций углов треугольника	4
Тригонометрия в вычислении площадей	7
Теорема синусов и косинусов.....	10
Векторы	17
Основные понятия	17
Действия с векторами.....	22
Разложение вектора на составляющие	28
Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	35
Метод координат	46
Координаты точки и вектора.....	46
Уравнение прямой.....	51
Уравнение окружности	64
Правильные многоугольники. Длина окружности. Площадь круга	73
Правильные многоугольники	73
Длина окружности. Площадь круга.....	80
Преобразования плоскости	87
Общие свойства движений	87
Виды движений	92
Ответы к некоторым заданиям разделов «Проверьте себя»	101

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Учебное электронное издание

Ниренбург Т. Л.

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

Тетрадь-тренажёр

Углублённый уровень

Генеральный директор

М. Б. Миндюк

Редактор *Д. П. Локтионов*

Художественный редактор *Е. Ю. Воробьёва*

Компьютерная верстка и макет *Е. В. Лупенко*

Корректор *М. Н. Локтионова*

Подписано к использованию 27.07.25

Формат 19,0×28,0 см

Гарнитура Times New Roman

Издательство «Интеллект-Центр»

125445, Москва, ул. Смольная, 24А, этаж 6, ком. 24

Тел.: (495) 660-34-53

Сайт: <https://www.intellectcentre.ru/>

Эл. почта: intellect@izentr.ru

**Электронное издание данной книги подготовлено
Агентством электронных изданий «Интермедиатор»**

Сайт: <https://www.intermediator.ru>

Телефон: (495) 587-74-81

Эл. почта: info@intermediator.ru

Издательство «Интеллект-Центр»

- Учебные материалы для подготовки к ЕГЭ, ОГЭ и ВПР
- Практикумы и дидактические материалы, сборники тестовых заданий
- Материалы для развития интеллектуальных способностей
- Учебные пособия, реализующие современные технологии в обучении и контроле знаний учащихся

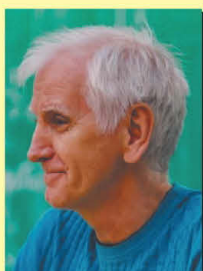
- **Покупайте наши пособия в электронном формате в интернет-магазине «Электронный универс»**
e-Univers.ru



КУРСЫ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

(образовательная лицензия № 0411759 от 27.10.2021 г.):

«ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ: ТЕХНОЛОГИЯ ПОДГОТОВКИ» (72 часа).



Автор: Прокофьев Александр Александрович, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой НИУ МИЭТ «Кафедра высшей математики – 1», председатель предметной комиссии по проверке ЕГЭ по математике г. Москвы в 2015–2020 гг., автор более 300 научных и учебно-методических публикаций.



«ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ, ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ» (36 часов).

Автор: Казарихина Татьяна Николаевна, кандидат педагогических наук, учитель математики и информатики высшей квалификационной категории, зам. директора АНО СОШ «Димитриевская», доцент кафедры теоретической информатики и дискретной математики МПГУ.

Форма обучения: заочная с применением ДОТ. Документ по окончании обучения: удостоверение о повышении квалификации установленного образца.

Подробнее о курсах можно узнать на сайте Издательства: www.intellectcentre.ru

Записаться на курсы можно:

- направив заявку на электронную почту: intellect@izentr.ru
- на сайте Издательства: <https://edu.intellectcentre.ru/>
- на сайте дополнительного профессионального образования педагогических работников города Москвы: <https://www.dpomos.ru/>

Издательство «Интеллект-Центр»

тел./факс: + 7 (495) 660-34-53

Ждём Ваших писем: 125445, г. Москва, ул. Смольная, д. 24А,

этаж 6, ком. 24 | e-mail: intellect@izentr.ru

www.intellectcentre.ru | vk.com/intellektcentre | t.me/izentr